



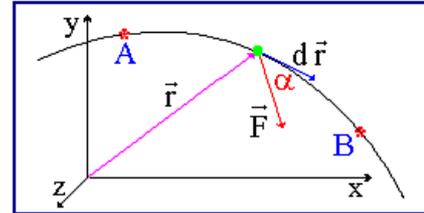
4.04 TRABAJO MECÁNICO.

Considerando el caso de una partícula (o centro de masa de un cuerpo) que se mueve a lo largo de una trayectoria como la sugerida en la figura siguiente, sometida a un campo de fuerza que en general pueda depender de las tres coordenadas espaciales, caracterizado mediante una función del tipo.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

Definiremos el Trabajo Mecánico que dicho campo de fuerzas realiza sobre la partícula, o sobre el centro de masa de un cuerpo, a lo largo la trayectoria, entre dos puntos A y B pertenecientes a la misma, como:

$$W_{A,B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \quad 4.16$$



Designando con (α) es el ángulo entre el vector que caracteriza la fuerza a la que está sometida la partícula en cada punto, con $(d\vec{r})$ al vector desplazamiento tangente a la trayectoria, cuyo sentido coincide con el sentido del movimiento y expresando en componentes intrínsecas a las magnitudes involucradas en el integrando de la anterior, como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F \cos \alpha) \vec{e}_t + (F \sin \alpha) \vec{e}_n$$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \quad \therefore \quad d\vec{r} = \dot{s} \vec{e}_t dt \quad \therefore \quad d\vec{r} = ds \vec{e}_t$$

Resulta:

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = (F \cos \alpha) ds$$

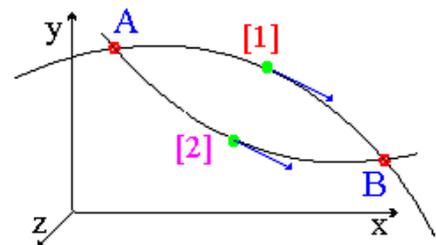
Con lo que, el trabajo mecánico a lo largo de la trayectoria en consideración, nos queda:

$$W_{A,B} = \int_A^B F \cos \alpha \, ds \quad 4.17$$

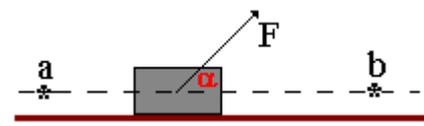
Siendo interesante destacar, que la componente tangencial $(F \cos \alpha)$, es la única que aporta al trabajo realizado por el campo de fuerza. Por lo tanto una fuerza normal a la trayectoria a lo largo de la que se desplace la partícula o el centro de masa de un cuerpo no realizará trabajo mecánico sobre el mismo, independiente de cual sea la longitud sobre la que estuviera aplicada.

Puesto que en general, tanto el módulo de la fuerza como el ángulo entre esta y el vector desplazamiento dependerán de la trayectoria a lo largo de la que se calcula la integral anterior, es claro entonces que el trabajo mecánico realizado por dicho campo de fuerza, entre dos puntos comunes a trayectorias distintas, dependerá de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcule, como se indica a continuación.

$$\int_A^B F \cos \alpha \, ds_1 \neq \int_A^B F \cos \alpha \, ds_2$$



Considerando el caso muy particular de un cuerpo que se desplaza a lo largo de una trayectoria recta sometido a una fuerza cuyo módulo y dirección permanece constante, como se sugiere en la figura, de (4.17) resulta que para dicha situación y designando con D a la distancia entre los puntos a y b de la trayectoria, el trabajo realizado por el campo de fuerza entre los puntos considerados vendrá dado por:



$$W_{ab} = F \cos \alpha \int_a^b ds$$

$$W_{ab} = FD \cos \alpha$$

Considerando el caso de una partícula sometida a un campo de fuerza tal que sus componentes cartesianas vienen dadas por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(xyz) \vec{i} + F_y(xyz) \vec{j} + F_z(xyz) \vec{k}$$



Y expresando al vector desplazamiento en dichas componentes.

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

El trabajo mecánico realizado por este campo de fuerza quedará expresado como:

$$W_{A,B} = \int_A^B F_x(xyz)dx + F_y(xyz)dy + F_z(xyz)dz$$

Que también podemos expresar como:

$$W_{A,B} = \int_A^B F_x(xyz)dx + \int_A^B F_y(xyz)dy + \int_A^B F_z(xyz)dz \quad 4.18$$

Donde cada una de las integrales deberá calcularse a lo largo de la trayectoria de interés, y que para el caso de una trayectoria contenida en el plano (x y) se reduce a:

$$W_{AB} = \int_A^B F_x(xyz)dx + \int_A^B F_y(xyz)dy \quad 4.19$$

Ejemplo.

Consideraremos el caso de una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria contenida en el plano (x y), entre los puntos de coordenadas (0,0) y (2,4), sometida a un campo de fuerzas que en componentes cartesianas viene dado por:

$$\vec{F}(xyz) = (k_1x + k_2y)\vec{i} + k_3xy\vec{j}$$

Donde las constantes tienen unidades tales que las componentes del campo de fuerza queden expresadas en Newton.

Inicialmente calcularemos el trabajo realizado por dicho campo de fuerzas cuando la partícula se desplaza a lo largo de la recta que une los puntos indicados anteriormente, esto es, a lo largo de la recta ($y = 2x$), en cuyo caso de (4.19) obtenemos que:

$$W = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (k_1x + k_2y) dx + \int_{(0,0)}^{(2,4)} k_3xy dy$$

Teniendo en cuenta la trayectoria a lo largo de la que se pretende determinar el trabajo realizado por el campo de fuerza, entonces:

$$y = 2x \quad \therefore \quad dy = 2dx$$

Con lo que, el trabajo mecánico nos queda expresado como:

$$W = \int_0^2 (k_1x + k_2 2x) dx + \int_0^2 k_3 4x^2 dx$$

Resultando que dicha magnitud vendrá dada por:

$$W = \left[\frac{1}{2}k_1x^2 + k_2x^2 + \frac{4}{3}k_3x^3 \right]_0^2$$

Suponiendo para las constantes los valores que se indican a continuación:

$$k_1 = 1 \text{ N/m} \quad k_2 = 2 \text{ N/m} \quad k_3 = 3 \text{ N/m}^2$$

El trabajo mecánico realizado por el campo de fuerza a lo largo de la trayectoria propuesta, resulta:

$$W = 42 \text{ Nm}$$

Supongamos ahora que la partícula se desplaza entre los mismos puntos a lo largo de la trayectoria ($y = x^2$) en cuyo caso, mediante el mismo procedimiento y teniendo en cuenta que en esta oportunidad:

$$y = x^2 \quad \therefore \quad dy = 2xdx$$

Obtenemos que el trabajo realizado por el campo de fuerza en consideración a lo largo de esta nueva trayectoria y suponiendo para las constantes los mismos valores, viene dado por:

$$W = \frac{58}{3} \text{ Nm}$$



Claramente diferente del resultado obtenido en el caso anterior.

Considerando ahora una situación similar pero suponiendo en esta oportunidad que el campo de fuerza al que se ve sometida la partícula viene expresado por:

$$\vec{F}(xyz) = (k_1x + k_2y^2)\vec{i} + k_3xy\vec{j}$$

Ligeramente diferente al considerado recientemente y donde ahora las constantes tienen los valores y unidades que se indican a continuación.

$$k_1 = 1\text{ N/m} \quad k_2 = 1\text{ N/m}^2 \quad k_3 = 2\text{ N/m}^2$$

Operando en forma análoga a las situaciones anteriores, se puede verificar fácilmente que el trabajo realizado por este nuevo campo de fuerza a lo largo de las trayectorias consideradas será el mismo en ambos casos. En realidad, como posteriormente lo demostraremos, el trabajo mecánico realizado por este nuevo campo de fuerza será el mismo cualquiera sea la trayectoria seleccionada entre dos puntos extremos comunes a las mismas, o sea que es independiente de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcule.

4.05 ENERGÍA CINÉTICA.

Pensando en una partícula (o en el centro de masa de un cuerpo) que se mueve respecto de un sistema de referencia (xyz) entre dos puntos (A y B) a lo largo de una determinada trayectoria, consideraremos ahora el trabajo mecánico realizado por la resultante de las fuerzas de interacción a que está sometida la partícula o el centro de masa del sistema y que formalmente indicaremos como:

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Suponiendo que el sistema de referencia (xyz) involucrado es un Sistema Inercial y puesto que (F) es la Resultante de las fuerzas de interacción, teniendo en cuenta la Ecuación de Newton, es claro que la anterior puede expresarse como:

$$W = \int_A^B m\vec{a}_{xyz} \cdot d\vec{r}$$

O bien, como:

$$W = \int_A^B m \frac{d\vec{v}_{xyz}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Que puede llevarse a la forma:

$$W = \int_{v_A}^{v_B} m\vec{v}_{xyz} \cdot d\vec{v}_{xyz}$$

Y que finalmente, teniendo en cuenta que la masa de la partícula es independiente de su estado de movimiento, aspecto que deberá revisarse al considerar partículas que se muevan con velocidades comparables con la de la luz, el trabajo mecánico podrá expresarse como:

$$W = \frac{1}{2} m \int_{v_A}^{v_B} dv_{xyz}^2$$

De donde resulta que el trabajo realizado por la **resultante** de las fuerzas de interacción estará relacionado con las velocidades de la partícula en los puntos extremos, mediante:

$$W = \frac{1}{2} mv_{B/xyz}^2 - \frac{1}{2} mv_{A/xyz}^2 \quad 4.20$$

Por lo tanto, cuando las velocidades están determinadas respecto de un sistema de referencia inercial, entonces el trabajo mecánico realizado por la resultante de las fuerzas de interacción estará directamente vinculado con los cambios observados en la función:

$$T = \frac{1}{2} mv^2$$



Que en adelante reconoceremos como función Energía Cinética o simplemente energía cinética de la partícula o del centro de masa del sistema en consideración.

A pesar de que ya fuera mencionado, resulta importante destacar que la validez de la relación (4.20), conocida como “Teorema de las Fuerzas Vivas”, requiere que el trabajo considerado sea el realizado por la resultante de las fuerzas de interacción, y que la energía cinética de la partícula esté determinada respecto de un sistema de referencia inercial.

Suponiendo que la energía cinética estuviera determinada respecto de un sistema de referencia no inercial, en traslación respecto de un sistema inercial, teniendo en cuenta lo desarrollado al considerar la ecuación de movimiento para sistemas no inerciales, podemos obtener una relación análoga a la (4.20) si en el trabajo mecánico se considera el realizado por las fuerzas de interacción más el realizado por la correspondiente fuerza inercial.

Finalmente resulta oportuno observar que si el campo de fuerza realiza un trabajo mecánico positivo, esto estará directamente asociado con un incremento en la energía cinética de la partícula, como sucede al dejar caer un cuerpo, en cuyo caso el campo de fuerza gravitatorio realiza un trabajo positivo que se traduce en un incremento de la energía cinética de dicho cuerpo. Inversamente en un tiro vertical, el trabajo mecánico del campo gravitatorio será negativo y la energía cinética disminuirá a medida que se incrementa la altura alcanzada por la partícula o centro de masa de un cuerpo.

En la naturaleza existen campos de fuerza que pueden realizar trabajo positivo, negativo o nulo, como es el caso del campo gravitatorio. En cambio existen otros campos de fuerza que por su naturaleza siempre realizarán trabajo mecánico negativo, como es el caso del rozamiento dinámico. Otras fuerzas son incapaces de realizar trabajo mecánico y por lo tanto no pueden modificar la energía cinética de una partícula, como sucede con la fuerza a la que se ve sometida una partícula cargada que interactúa con un campo magnético estacionario, en cuyo caso la fuerza resulta siempre normal a la trayectoria y por lo tanto el trabajo mecánico realizado por dicho campo de fuerza será siempre nulo.

Ejemplo.

Para la situación planteada en la página 4-5 y teniendo en cuenta la relación (4.20), el trabajo mecánico realizado sobre la partícula por la fuerza que resulta de su interacción con la cuerda desde el instante inicial hasta el instante en que su coordenada radial se reduce a la mitad, vendrá dado por:

$$W = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)$$

Suponiendo aplicada una fuerza (3) veces mayor que la requerida para mantener la trayectoria inicial, en cuyo caso, como ya lo demostráramos en el planteo original del mencionado ejemplo, la partícula alcanza la coordenada ($r_1 = r_0/2$) con una velocidad dada por:

$$v_1 = 2v_0$$

El trabajo mecánico realizado resultará:

$$W = \frac{3}{2} m v_0^2$$

Y por lo tanto:

$$W = 3T_0$$

Siendo interesante destacar la simplicidad del método, si lo comparamos con los inconvenientes que deberíamos sortear si deseáramos efectuar el cálculo directamente a partir de la definición dada para el trabajo mecánico.

4.06 CAMPO DE FUERZA RADIAL ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICO.

Considerando el trabajo mecánico realizado por un campo de fuerza radial esféricamente simétrico como el que se indica a continuación:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$$



En cuyo caso expresando al vector desplazamiento como:

$$d\vec{r} = \vec{v}dt$$

Y al vector velocidad en componentes polares, ya que para esta situación la trayectoria a lo largo de la que se desplazará la partícula será plana.

$$d\vec{r} = (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) dt$$

El vector desplazamiento nos queda.

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta$$

Con lo que, para esta situación, el integrando de (4.16) resulta:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = f(r) dr$$

Y el trabajo mecánico realizado por este campo de fuerza vendrá dado por:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr \quad 4.21$$

Claramente independiente de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcule. Así en el caso de una partícula de masa (m) que interactúa con el campo gravitatorio de un planeta de masa (M), el campo de fuerza a que se verá sometida la partícula viene expresado por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

Con lo que el trabajo realizado sobre la partícula por dicho campo de fuerza resulta:

$$W = - \int_{r_A}^{r_B} G \frac{mM}{r^2} dr$$

Independiente de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcule y que vendrá dado por:

$$W = - GmM \left[\left(-\frac{1}{r_B} \right) - \left(-\frac{1}{r_A} \right) \right] \quad 4.22$$

Análogamente, considerando una partícula sometida a un campo de fuerza elástico:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k r \vec{e}_r$$

El trabajo realizado por este campo sobre una partícula vendrá expresado por:

$$W = - \int_{r_A}^{r_B} k r dr$$

Que nuevamente resulta independiente de la trayectoria, y viene dado por:

$$W = - \frac{1}{2} k (r_B^2 - r_A^2) \quad 3.23$$

Resultando interesante observar que para las situaciones consideradas el trabajo mecánico puede ser expresado como la diferencia, cambiada de signo, de una función escalar de la coordenada radial. Así en el caso de un campo gravitatorio la función a la que hacemos referencia, vendrá dada por:

$$\Phi(r) = -G \frac{mM}{r}$$

Y en el caso de un campo de fuerzas elásticas, por:

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} k r^2$$

Con lo que en ambos casos, el trabajo mecánico realizado por el campo de fuerza es independiente de la trayectoria y puede ser expresado como:

$$W = - [\Phi(r_B) - \Phi(r_A)]$$

Donde (Φ) es la correspondiente función escalar a la que hacemos referencia anteriormente.



4.07 CAMPO DE FUERZA CONSERVATIVO.

Función Energía Potencial.

Diremos que un campo de fuerzas es un **Campo Conservativo** cuando, el trabajo mecánico realizado por dicho campo es independiente de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcula y puede ser expresado como la diferencia, cambiada de signo, de una función escalar de las coordenadas de los puntos extremos, lo que formalmente puede expresarse como:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = - [\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)] \quad 4.24$$

Donde a la función escalar, asociada con el campo de fuerza considerado, la reconoceremos en adelante como **Función Energía Potencial**, que como ya lo mencionáramos será, en general, una función escalar de las coordenadas espaciales que en adelante identificaremos con:

$$\Phi = \Phi(\vec{r})$$

Teniendo en cuenta lo mencionado recientemente y atendiendo las conclusiones obtenidas en el tema anterior resulta que, en general, un campo de fuerza radial esféricamente simétrico deberá ser considerado un campo conservativo. En particular de (4.22) obtenemos que la función energía potencial asociada a un campo gravitatorio vendrá expresada por:

$$\Phi_g(r) = -G \frac{mM}{r} \quad 4.25$$

Análogamente teniendo en cuenta (4.23) es claro que la función energía potencial asociada con un campo de fuerza elástico vendrá expresada por:

$$\Phi_e(r) = \frac{1}{2} k r^2 \quad 4.26$$

Considerando el caso de una partícula sometida al campo de fuerza resultante de su interacción con un muelle lineal de longitud propia (r_0), con lo que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k(r - r_0) \vec{e}_r$$

Y teniendo en cuenta lo anterior, resulta que la función energía potencial asociada con dicho campo de fuerza vendrá expresada por:

$$\Phi_m(r) = \frac{1}{2} k(r - r_0)^2 \quad 4.27$$

Que en términos de la deformación (δ) del muelle podemos indicar como:

$$\Phi_m(r) = \frac{1}{2} k \delta^2$$

Considerando la interacción con un campo de fuerza gravitatorio constante, de la forma:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -mg \vec{j}$$

Resulta que la función energía potencial vendrá dada por:

$$\Phi_{gc}(r) = mgy \quad 4.28$$

Resulta importante destacar que la Función Energía Potencial no está unívocamente definida, en realidad, está definida a menos de una constante arbitraria, en cuanto a que (4.24) nos define la diferencia de la función energía potencial y no la función misma, por lo que a cada una de las funciones obtenidas recientemente podríamos sumarle una constante arbitraria y su diferencia cambiada de signo continuaría satisfaciendo (4.24). Así a las funciones asociadas con cada uno de los campos considerados recientemente podríamos expresarlas como:

$$\Phi_g(r) = -G \frac{mM}{r} + \text{cte}$$



$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2 + \text{cte}$$

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)^2 + \text{cte}$$

$$\Phi_{gc}(\mathbf{r}) = mgy + \text{cte}$$

Y continuarían satisfaciendo lo requerido por (4.24), lo que puede parecer un serio inconveniente, sin embargo no lo es, puesto que en general estaremos interesados no en el valor que toma dicha función sino en la diferencia de dicha función entre dos estados determinados, o sea en el trabajo mecánico realizado por el campo de fuerza en consideración, que es el que producirá cambios en la energía cinética de la partícula o centro de masa de un cuerpo.

Sin embargo resulta cómodo para el manejo de información, ponernos de acuerdo en asignar a dichas constantes un determinado valor, siendo indudablemente el valor nulo el más recomendable, lo que para cada uno de los casos considerados implica asignar arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial para puntos del espacio según los criterios que se detallan a continuación.

Campo Gravitatorio.

Asignaremos arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial cuando la coordenada radial involucrada tiende a infinito, con lo que la constante será nula y la función nos queda:

$$\Phi_g(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r}$$

Campo de Fuerza Elástico.

Asignaremos arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial cuando la coordenada radial involucrada es nula, con lo que la constante será nula y la función nos queda:

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2$$

Interacción con un Muelle Lineal.

Asignaremos arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial cuando la coordenada radial coincida con la longitud propia del muelle, o sea cuando el muelle está sin deformar, con lo que:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_o)^2$$

Campo Gravitatorio Constante.

Asignaremos arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial cuando la coordenada vertical es nula, con lo que la constante será nula y la función nos queda:

$$\Phi_{gc}(\mathbf{r}) = mgy$$

Aceptando estas condiciones, en adelante podremos referirnos sin ambigüedades a la función energía potencial asociada con los campos de fuerza mencionados anteriormente.

Finalmente resulta interesante notar que si un campo de fuerzas es conservativo y por ende satisface (4.24) entonces el trabajo mecánico realizado por dicho campo a lo largo de una trayectoria cerrada será nulo, ya que en ese caso los extremos de integración serán coincidentes y por lo tanto también lo serán los valores de la función energía potencial, con lo que:

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$



Relaciones Puntuales en un Campo Conservativo.

Considerando un campo de fuerzas conservativo, y teniendo en cuenta que en ese caso se satisface (4.24) resulta entonces que el integrando de la mencionada expresión deberá coincidir con el diferencial de la función energía potencial asociada al campo de fuerza involucrado y por lo tanto:

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -d\Phi$$

Así, en el caso de un campo de fuerza radial esféricamente simétrico, resulta:

$$f(r) \cdot dr = -d\Phi$$

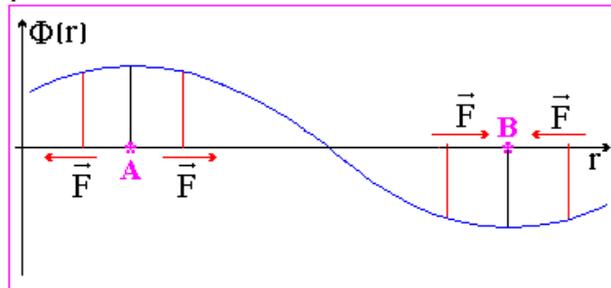
Donde recordemos que en este caso.

$$\Phi = \Phi(r)$$

Con lo que, el campo de fuerza estará relacionado con la función energía potencial mediante:

$$f(r) = - \frac{d\Phi}{dr} \quad 3.29$$

Por lo tanto, en una representación gráfica de la energía potencial en función de la coordenada radial, la pendiente de la misma en cada punto nos proporcionará información sobre la fuerza en dicho punto, como se sugiere en la figura siguiente, donde se representa gráficamente una función energía potencial arbitraria dependiente únicamente de la coordenada radial y el sentido que tendrá la fuerza a la que se vería sometida una partícula en puntos del espacio con diferentes valores para la mencionada coordenada.



En particular resulta interesante destacar que los puntos (A) y (B) son puntos de equilibrio, en cuanto a que la fuerza a la que se vería sometida una partícula en dichos puntos será nula, puesto que en los mismos la pendiente de la función se anula. Sin embargo existe una interesante diferencia entre ambas situaciones, ya que en el punto (A) un pequeño apartamiento de la posición de equilibrio dará lugar a fuerzas que alejarán definitivamente la partícula de dicho punto, en cambio en (B), las fuerzas tenderán a restituir la partícula a la posición de equilibrio, por lo que en el primer caso diremos que se encuentra en un estado de **equilibrio inestable**, en cambio en el segundo caso diremos que se encuentra en un estado de **equilibrio estable**.

Finalmente y teniendo en cuenta que si un campo es conservativo, entonces.

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -d\Phi$$

Suponiendo que la función energía potencial dependa de las tres coordenadas espaciales (xyz), su diferencial vendrá dado por:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi}{\partial z} dz$$

Por otro lado evaluando el miembro de la izquierda en componentes cartesianas, nos queda:

$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Con lo que, de las anteriores resulta:

$$F_x = - \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad F_y = - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad F_z = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Y al campo de fuerza podremos expresarlo como:



$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{k}\right)$$

Por lo tanto, cuando un campo es conservativo, entonces:

$$\vec{F} = -\nabla \Phi \quad 3.30$$

Y puesto que el rotor del gradiente es nulo, resulta que si un campo de fuerza es conservativo, entonces:

$$\nabla \times \vec{F} = \mathbf{0}$$

Así, para la situación planteada en el tema anterior, cuando el campo de fuerza era:

$$\vec{F}(xyz) = (k_1x + k_2y) \vec{i} + k_3xy \vec{j}$$

Con.

$$k_1 = 1 \text{ N/m} \quad k_2 = 2 \text{ N/m} \quad k_3 = 3 \text{ N/m}^2$$

Su rotor **no es nulo** y por lo tanto no se trata de un campo conservativo, con lo que el trabajo mecánico que dicho campo realice sobre una partícula dependerá de la trayectoria. En cambio para la segunda situación considerada, cuando el campo de fuerza venía dado por:

$$\vec{F}(xyz) = (k_1x + k_2y^2) \vec{i} + k_3xy \vec{j}$$

Con.

$$k_1 = 1 \text{ N/m} \quad k_2 = 1 \text{ N/m}^2 \quad k_3 = 2 \text{ N/m}^2$$

Se puede verificar fácilmente que el rotor del campo de fuerza será nulo y por lo tanto el campo será conservativo y el trabajo que realizará dicho campo sobre una partícula será independiente de la trayectoria a lo largo de la que lo calculemos, como se menciona al final del ejemplo de referencia.

Ejemplo.

Teniendo en cuenta las conclusiones obtenidas, y considerando un campo gravitatorio:

$$\Phi_g(r) = -G \frac{mM}{r}$$

Una gráfica cualitativa en función de la coordenada radial se verá como se muestra lateral.

Resultando que no existen puntos de equilibrio y a cualquier distancia del centro de fuerza la partícula se verá sometida a una fuerza dirigida hacia dicho punto, que teniendo en cuenta (4.29) vendrá dada por:

$$\vec{F}(r) = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

Análogamente, en el caso de un campo que resulta de la interacción con un muelle lineal, la función energía potencial en términos de la deformación del muelle venía dada por:

$$\Phi_m = \frac{1}{2} k \delta^2$$

Con lo que una representación gráfica de la misma, en función de la coordenada radial nos queda como se muestra cualitativamente en la figura lateral, donde podemos observar que existe un punto de equilibrio estable cuando la deformación del muelle es nula.

Siendo la fuerza atractiva cuando la deformación es positiva, o sea cuando el muelle está elongado, y repulsiva cuando la deformación es negativa, o sea cuando el muelle está comprimido.

