5.05 CONSIDERACIONES ENERGÉTICAS.

Energía Cinética.

Definiremos la Energía Cinética de un sistema formado por un conjunto de (N) partículas, respecto de un sistema de referencia (xyz), como la suma de las energías cinéticas de cada una de las partículas que lo integran:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 \qquad 5.20$$

Que en términos de la velocidad del centro de masa y de las velocidades de cada una de las partículas respecto del sistema de referencia centroidal, queda expresada, luego de tener en cuenta (5.10), como:

$$T = \sum \frac{1}{2} m_i (v_c^2 + v_i'^2 + 2\vec{v}_c \cdot \vec{v}_i')$$

De donde:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \vec{v}_c \cdot \sum m_i \vec{v}_i'$$

Puesto que, de acuerdo con (5.12), el último termino es nulo, la energía cinética nos queda expresada como:

$$T = \frac{1}{2} m v_c^2 + \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \qquad 5.21$$

Por lo tanto, similarmente al resultado obtenido en el caso del vector momento angular, a la energía cinética de un sistema, podremos expresarla como la suma de un término que tiene en cuenta el movimiento del centro de masa, respecto del sistema fundamental (xyz), como si la totalidad de la masa estuviera concentrada en él y que en adelante reconoceremos como **Término Orbital:**

$$T_{or} = \frac{1}{2} m v_c^2 \qquad 5.22$$

Mas un término que tiene en cuenta el movimiento de cada una de las partículas respecto del sistema de referencia centroidal, que en adelante reconoceremos como **Término Intrínseco,** expresado por:

$$T' = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \qquad 5.23$$

Donde a diferencia de lo que sucedía en el caso de la componente intrínseca del vector momento angular, las velocidades de cada una de las partículas deberá estar determinada necesariamente respecto del sistema de referencia centroidal.

Teniendo en cuenta como se definió el vector cantidad de movimiento de un sistema así como el vector cantidad de movimiento de cada una de las partículas respecto del sistema de referencia centroidal, es inmediato que (5.21) puede expresarse en términos de éstas magnitudes como:

$$T = \frac{p^2}{2m} + \sum \frac{p_i'^2}{2m_i} \qquad 5.24$$

En particular considerando un **sistema de dos partículas,** y teniendo en cuenta que las cantidades de movimiento, determinadas respecto del sistema centroidal, serán tales que:

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = 0$$

Con lo que:

$$\vec{p}_1' = -\vec{p}_2' = \vec{p}'$$

De (5.24), resulta que para ésta situación, la energía cinética puede expresarse como:

$$T = \frac{p^2}{2m} + \frac{p'^2}{2\mu}$$

Donde:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \qquad 5.25$$

Es una magnitud que con frecuencia interviene al considerar un sistema de dos cuerpos y que se conoce como **Masa Reducida** del sistema.

Trabajo Mecánico y Energía Cinética.

Definiremos el Trabajo Mecánico realizado sobre un sistema por la totalidad de las fuerzas de interacción (externas e internas) a que estuviera sometido, como la suma del trabajo mecánico realizado por las mencionadas fuerzas de interacción sobre cada una de las partículas que lo integran, lo que formalmente podemos expresar como:

$$W = \sum W_i \qquad 5.26$$

Puesto que en cada uno de los términos incluidos en la sumatoria anterior se considera el trabajo mecánico que la totalidad de las fuerzas de interacción realizan sobre cada una de las partículas, teniendo en cuenta las conclusiones obtenidas al considerar la dinámica para un cuerpo puntual, es claro que la anterior puede expresarse como:

$$W = \sum \Delta T_i$$

Donde:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

O bien como:

$$W = \Delta \sum T_i \quad \therefore \quad W = \Delta T$$

Que teniendo en cuenta (5.21) nos queda:

$$W = \Delta T_{or} + \Delta T' \qquad 5.27$$

Por otro lado y atendiendo como fuera definido el trabajo mecánico a lo largo del primer capítulo, la (5.26) puede expresarse como:

$$W = \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i \qquad 5.28$$

Donde con el subíndice (**tr/i**) en las integrales incluidas en la sumatoria, pretendemos dejar de manifiesto que las mismas están calculadas a lo largo de las trayectorias a lo largo de las que se desplaza cada una de las partículas que integran el sistema y que por lo tanto es fácil imaginar, serán en general **diferentes** (pensemos en las partículas que integran una masa de gas contenida en un determinado volumen), motivo por el que no podemos intercambiar los símbolos de sumatoria e integración.

Con el propósito de obtener una simplificación de la expresión anterior, que además nos permitirá obtener relaciones con los términos, orbital e intrínseco de la energía cinética, al diferencial asociado con cada una de las trayectorias mencionadas en el párrafo anterior podemos vincularlo con el diferencial asociado con la trayectoria a lo largo de la que se desplazará el centro de masa del sistema, teniendo en cuenta (5.10), resultando que el trabajo mecánico puede expresarse como:

$$W = \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot (d\vec{r}_c + d\vec{r}_i')$$

O bien como:

$$W = \sum \int (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Donde las integrales incluidas en la primer sumatoria están todas calculadas a lo largo de la trayectoria del centro de masa del sistema (que indudablemente es única, no depende del índice de la sumatoria) y por lo tanto es posible intercambiar los símbolos de sumatoria e integral. En cambio las integrales consideradas en la segunda sumatoria están calculadas a lo largo de las trayectorias de cada una de las partículas, respecto del sistema centroidal, que nuevamente, en general, debemos esperar sean diferentes y por lo tanto se continua manteniendo la situación inicial y no podemos intercambiar los símbolos mencionados, con lo que el trabajo mecánico realizado por la totalidad de las fuerzas de interacción, sobre el sistema, puede indicarse como:

$$W = \int \left[\sum (\vec{F}_i + \vec{f}_i)\right] \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Que claramente puede expresarse como:

$$W = \int \left[\sum \vec{F}_i\right] \cdot d\vec{r}_c + \int \left[\sum \vec{f}_i\right] \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i'$$

Teniendo en cuenta el principio de acción y reacción, el integrando de la segunda integral es nulo. Por otro lado el integrando de la primera es indudablemente la resultante de las fuerzas externas a que está sometido el sistema, con lo que de la anterior resulta:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c + \sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i' \qquad 5.29$$

Con lo que, el trabajo mecánico nos queda expresado como la suma de dos términos. Un primer término que podemos interpretar como el trabajo mecánico que realizaría la resultante de las fuerzas externas a lo largo de la trayectoria del centro de masa, como si ésta resultante estuviera aplicada en dicho punto, mas un segundo término donde las integrales están calculadas a lo largo de las trayectorias de las partículas respecto del sistema centroidal y en el que claramente intervienen las fuerzas internas a que están sometidas las partículas que integran nuestro sistema.

Trataremos a continuación de vincular cada uno de los términos obtenidos recientemente con los cambios observados en la energía cinética del sistema, para lo cuál consideraremos inicialmente el primer término, que teniendo en cuenta la ecuación de movimiento para el centro de masa del sistema puede expresarse como:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \int m\vec{a}_c \cdot d\vec{r}_c$$

Por lo tanto:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \int m \frac{d\vec{v}_c}{dt} \cdot d\vec{r}_c$$

De donde:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \int m\vec{v}_c \cdot d\vec{v}_c$$

De donde:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \frac{1}{2} m \int dv^2 \qquad \int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \Delta\left(\frac{1}{2} mv^2\right)$$

Y por lo tanto:

$$\int \vec{F} \cdot d\vec{r}_c = \Delta T_{or} \qquad 5.30$$

Con lo que el primer término de (5.29) no queda directamente vinculado con los cambios observados en el término orbital de la energía cinética del sistema.

Teniendo en cuenta (5.27), (5.29) y (5.30) es claro entonces que el segundo término de (5.29) estará directamente relacionado con los cambios observados en el término intrínseco de la energía cinética, lo que formalmente podemos expresar como:

$$\sum \int_{tr/i} (\vec{F}_i + \vec{f}_i) \cdot d\vec{r}_i' = \Delta T' \qquad 5.31$$

Por lo tanto, si bien **las fuerzas internas** no pueden modificar el estado de movimiento del centro de masa de un sistema (no intervienen en la ecuación de movimiento de dicho punto)

ni tampoco pueden alterar su vector momento angular (no intervienen en la ecuación de momentos), son precisamente uno de los elementos asociados con los cambios observados en la energía cinética del sistema. Mas precisamente con los cambios observados en el término intrínseco de dicha magnitud, como lo pone de manifiesto con toda claridad la relación recientemente obtenida. Así para la situación planteada en el ejemplo (5.2), la energía cinética del sistema cambia como consecuencia de que cambia el término intrínseco de la misma (el término orbital en esta situación no sufre cambio alguno) y esto, como consecuencia precisamente del trabajo mecánico realizado por las fuerzas internas que resultan de la interacción mutua entre los elementos que forman el sistema.

Energía Mecánica.

Consideraremos ahora el conjunto de fuerzas externas e internas conservativas a que pudiera encontrarse sometido un sistema, o sea, el conjunto de fuerzas externas que satisfacen relaciones del tipo:

$$\int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = -\Delta \Phi_i$$

Y de fuerzas internas, que satisfacen relaciones del tipo:

$$\int_A^B \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = -\Delta \Phi_{ij}$$

Donde las funciones escalares recientemente indicadas están asociadas con cada una de las fuerzas internas conservativas a que pudiera estar sometida cada una de las partículas que integran nuestro sistema, con lo que podemos definir un conjunto de funciones energía potencial, asociadas con éstos mecanismos de interacción, mediante expresiones del tipo:

$$\Phi_i^{int} = \sum_j \Phi_{ij}$$

Teniendo en cuenta lo indicado anteriormente, podremos definir una función energía potencial externa asociada con la totalidad de dichas fuerzas conservativas, como:

$$\Phi_{ext} = \sum \Phi_i \qquad 5.32$$

Y una función energía potencial asociada con el conjunto de fuerza internas conservativas, dada por:

$$\Phi_{int} = \frac{1}{2} \sum \Phi_i^{int} \qquad 5.33$$

Donde el factor (1/2) debe ser incluido ya que de lo contrario se contabilizaría en dos oportunidades la misma función bajo el signo de la sumatoria.

Con lo mencionado anteriormente, definiremos a la **Energía Mecánica** del sistema como:

$$E = T + \Phi_{ext} + \Phi_{int} \qquad 5.34$$

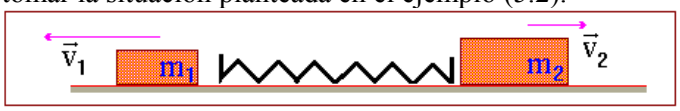
Donde el primer término es la energía cinética del sistema definida por (5.20) o bien por (5.21) y los restantes corresponden a los expresados mediante (5.32) y (5.33) respectivamente.

Procediendo de manera semejante a lo realizado para el caso de una partícula y teniendo en cuenta las últimas conclusiones y definiciones desarrolladas en esta oportunidad, se puede verificar fácilmente que las variaciones observadas en la energía mecánica de un sistema estarán directamente vinculadas con el trabajo mecánico realizado por las fuerzas externas e internas, no conservativas lo que formalmente podemos expresar mediante la igualdad siguiente:

$$\Delta E = \Phi_{ext-nc} + \Phi_{int-nc} \qquad 5.35$$

De donde resulta que, si el trabajo mecánico realizado por las fuerzas externas e internas, no conservativas, fuera nulo o bien si la totalidad de las fuerzas a que estuviera sometido el sistema fueran conservativas, la energía mecánica del mismo permanecerá constante.

Ejemplo (5.5)
Estamos ahora en condiciones de retomar la situación planteada en el ejemplo (5.2).



En aquella oportunidad, teniendo en cuenta la conservación de la cantidad de movimiento del sistema obtuvimos que las velocidades de ambos cuerpos al finalizar su interacción con el resorte, que originalmente se encontraba comprimido, deberían ser tales que:

$$\vec{v}_1 = -\frac{m_1}{m_2}\vec{v}_2$$

Teniendo en cuenta que hemos supuesto al sistema libre de rozamiento es claro entonces que la resultante de las fuerzas externas es nula y por lo tanto el trabajo realizado por las mismas también lo será. Puesto que además las fuerzas internas a que está sometido resultan de la interacción con el resorte dando lugar así a fuerzas conservativas, de (5.35) resulta que la energía mecánica del sistema a de permanecer constante, e igual a la que tenia en el instante inicial, esto es:

$$E = E_\circ$$

Siendo:

$$E_\circ = \frac{1}{2}k\delta_\circ^2$$

Donde con (δ_o) hacemos referencia a la deformación inicial del resorte, con lo que resulta que al finalizar la interacción con el resorte las velocidades de las partículas serán tales que:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}k\delta_\circ^2$$

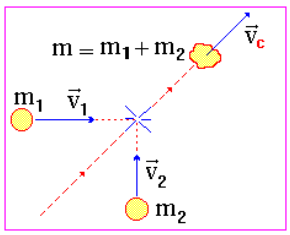
De donde, y teniendo en cuenta la relación inicial entre las velocidades, resulta:

$$v_1^2 = \frac{k\delta_\circ^2}{m_1 + m_2} \qquad v_2^2 = \frac{m_1}{m_2}\frac{k\delta_\circ^2}{m_1 + m_2}$$

5.06 TEORÍA DE COLISIONES

A lo largo de este tema trataremos formalmente dos casos extremos vinculados con la colisión entre partículas, suponiendo nula la resultante de las fuerzas externas a que pudieran encontrarse sometidas. Inicialmente consideraremos aquella situación en la que luego de la colisión las partículas continúan unidas, de tal manera que se las pueda considerar como una única partícula cuya masa es la suma de las anteriores y que reconoceremos como una **Colisión Plástica.** Posteriormente trataremos el caso en el que una vez finalizada la colisión, las partículas conservan su identidad y el proceso es tal que durante la colisión, las fuerzas internas, producto del contacto entre las partículas, son del tipo elástica y por lo tanto conservativas, situación que reconoceremos como **Colisión Elástica.**

Colisión Plástica.



La figura lateral ilustra cualitativamente una situación como la que mencionáramos inicialmente en el párrafo anterior, siendo condición necesaria para que este proceso tenga lugar, que con anterioridad a la colisión, los vectores velocidad de ambas partículas estén contenidos en el mismo plano ya que de lo contrario sería imposible la intersección de sus trayectorias.
Aceptando lo mencionado, resulta que la componente intrínseca del vector momento angular del sistema dará lugar a un vector perpendicular a dicho plano, que permanecerá constante a lo largo de todo el proceso como consecuencia de la ausencia de fuerzas externas que pudieran modificarlo, con lo que el proceso en su totalidad estará contenido en el plano

mencionado inicialmente, como se sugiere en la figura anterior, donde se indican las trayectorias a lo largo de las que se desplazarán las partículas y el centro de masa del sistema, cuyo vector velocidad permanecerá constante y será tal que:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m\vec{v}_c$$

De donde:

$$\vec{v}_c = \frac{1}{m}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)$$

Balance Energético.

Resulta ilustrativo realizar un balance de las energías involucradas en el proceso, teniendo en cuenta que la energía cinética del sistema antes de la colisión viene expresada por:

$$T_\circ = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

Y una vez finalizada la colisión, por:

$$T_f = \frac{1}{2}mv_c^2$$

Por lo tanto:

$$T_f = \frac{1}{2}m\vec{v}_c \cdot \vec{v}_c$$

De donde, y teniendo en cuenta la expresión obtenida para la velocidad del centro de masa en término de las velocidades de cada una de las partículas antes de la colisión, resulta:

$$T_f = \frac{1}{2m}(m_1^2v_1^2 + \frac{1}{2}m_2^2v_2^2 + 2m_1m_2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2)$$

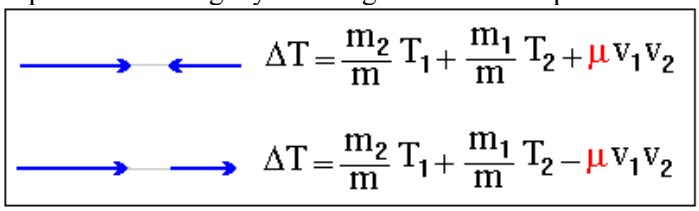
La **pérdida** de energía mecánica como consecuencia de la colisión viene expresada por:

$$\Delta T = T_\circ - T_f$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas anteriormente resulta que esta cantidad en término de las magnitudes iniciales nos queda:

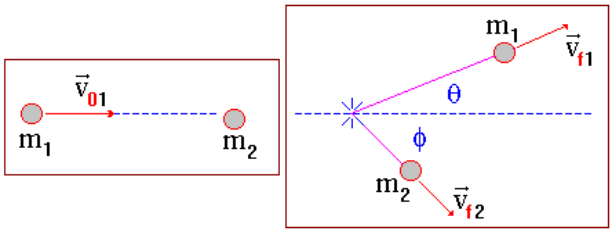
$$\Delta T = \frac{m_1}{m}T_1 + \frac{m_2}{m}T_2 - \mu\,\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$$

Resultando así las situaciones extremas que se indican a continuación, cuando las trayectorias de incidencia son coincidentes y la colisión se produce entre dos partículas que se desplazan en sentido opuesto o bien cuando lo hacen en el mismo sentido, reultando que en el primer caso tenemos la mayor pérdida de energía y en el segundo la menor posible.



Colisión Elástica.

Consideraremos a continuación la situación planteada en el ejemplo (5.3), suponiendo que las fuerzas internas a que se ven sometidos los cuerpos durante la colisión, son del tipo elástica y que por lo tanto la energía mecánica del sistema permanece constante.



Nuevamente la conservación del vector momento angular nos permite garantizar que el proceso tendrá lugar en el plano definido por el vector velocidad de la partícula incidente y el punto donde se encuentra inicialmente la partícula blanco, como se sugiere en la figura que antecede.
Teniendo en cuenta la conservación del vector cantidad de movimiento del sistema y tal como lo indicamos a lo largo del ejemplo (5.3), las magnitudes involucradas en el proceso serán tales que:

$$m_1 v_{01} = m_1 v_{f1} \cos\theta + m_2 v_{f2} \cos\phi$$

$$0 = m_1 v_{f1} \operatorname{sen}\theta - m_2 v_{f2} \operatorname{sen}\phi$$

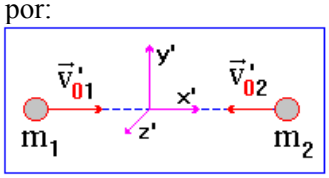
Teniendo en cuenta ahora que la energía mecánica del sistema permanece constante:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{01}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{f1}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{f2}^2$$

Con lo que obtenemos un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas que obviamente no nos permiten obtener una solución completa de nuestro problema por lo que trataremos de obtener expresiones para tres de las mencionadas incógnitas en función de la restante, que por lo tanto deberemos interpretar como un parámetro asociado con problema en consideración.
Primeramente obtendremos una descripción de la situación planteada válida para un observador en el sistema de referencia centroidal de nuestro sistema de partículas, a partir de la cuál obtendremos posteriormente una descripción válida para un observador en el sistema de laboratorio, entendiendo por tal, a un sistema de referencia respecto del cuál antes de la colisión una de las partículas se encuentra en reposo, que para nosotros es aquella cuya masa hemos identificado con (m_2) y que en adelante identificaremos como partícula blanco, dejando para la restante el nombre de proyectil.

Tratamiento en el Sistema de Referencia Centroidal.
Teniendo en cuenta lo mencionado es inmediato que el sistema de referencia centroidal al que hacemos referencia en el párrafo anterior es un sistema de ejes ortogonales con origen en el centro de masa del sistema de partículas, que se traslada respecto del sistema de laboratorio (fijo a la partícula en reposo, que en adelante identificaremos como partícula blanco) con una velocidad coincidente con la del centro de masa, como se sugiere en la figura siguiente, que teniendo en cuenta (5.1) vendrá dada por:

$$\vec{v}_c = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{01} \qquad 5.36$$



Por otro lado teniendo en cuenta (5.10) y (5.36) podemos obtener expresiones para la velocidad de cada una de las partículas respecto del sistema de referencia centroidal, que resultan:

$$\vec{v}'_{01} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{v}_{01} \qquad \vec{v}'_{02} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{01} \qquad 5.37$$

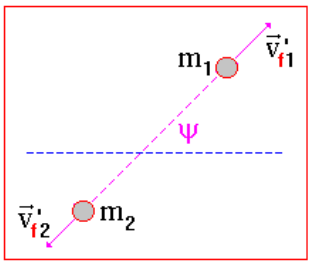
De donde puede obtenerse una relación entre ambas magnitudes que posteriormente nos será de utilidad y que se indica a continuación:

$$\vec{v}'_{01} = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}'_{02} \qquad 5.38$$

Que también podríamos haber alcanzado teniendo en cuenta que el vector cantidad de movimiento del sistema, determinado respecto del sistema de referencia centroidal será siempre nulo. Aspecto este último que nos permite obtener rápidamente una relación entre las velocidades con que emergen las partículas, respecto del mencionado sistema, una vez concluida la colisión:

$$\vec{v}'_{f1} = -\frac{m_2}{m_1}\vec{v}'_{f2} \qquad 5.39$$

Por lo que, una vez finalizada la colisión, respecto del sistema de referencia centroidal, las partículas se desplazarán en sentido opuesto y a lo largo de trayectorias como las indicadas cualitativamente en la figura lateral, donde (ψ) es el ángulo entre la trayectoria según la cuál emerge la partícula incidente respecto del sistema centroidal y la trayectoria a lo largo de la que se desplazaba inicialmente, respecto del sistema de laboratorio, claramente coincidente con la del centro de masa, respecto de dicho sistema.



Por otro lado, Teniendo en cuenta que la resultante de las fuerzas externas es nula y que las fuerzas internas operantes durante la colisión son del tipo conservativo, estamos en condiciones de garantizar que los términos intrínsecos de la energía cinética del sistema antes y después de la colisión serán coincidentes:

$$\frac{1}{2}m_1 v'^2_{01} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{02} = \frac{1}{2}m_1 v'^2_{f1} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{f2}$$

Teniendo en cuenta las relaciones (5.38) y (5.39), de la anterior resulta:

$$\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)m_2 v'^2_{02} = \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)m_2 v'^2_{f2}$$

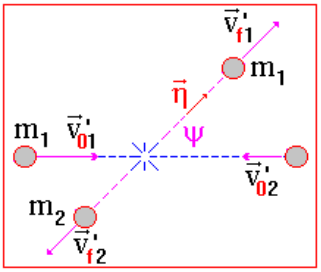
De donde es inmediato que:

$$v'_{f2} = v'_{02} \qquad 5.40$$

Reemplazando la anterior en (5.39) y luego comparando con (5.38) resulta:

$$v'_{f1} = v'_{01} \qquad 5.41$$

Con lo que de (5.39), (5.40) y (5.41) podemos concluir que, en el sistema centroidal el único efecto de la colisión se puede resumir en una rotación del vector velocidad de cada una de las partículas, que saldrán disparadas en sentido opuesto con la misma velocidad que tenían antes de la colisión como se sugiere en la figura siguiente.



Designando con (η) a un vector unitario destinado a caracterizar la dirección en que emerge la partícula incidente, como se indica en la figura anterior, y teniendo en cuenta las conclusiones alcanzadas recientemente, y las expresiones (5.37), resulta que el vector velocidad con que emerge cada partícula, determinada respecto del sistema centroidal, puede expresarse como:

$$\vec{v}'_{f1} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}v_{01}\vec{\eta} \qquad \vec{v}'_{f2} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}v_{01}\vec{\eta} \qquad 5.42$$

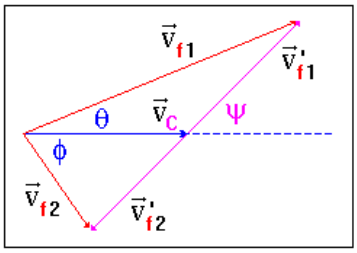
Donde, como lo habíamos previsto al iniciar el tratamiento del tema, la solución queda expresada en términos de un parámetro, en este caso el ángulo (ψ), implícitamente incluido en el vector unitario empleado en las expresiones anteriores.

Tratamiento en el Sistema de Laboratorio.

Teniendo en cuenta la relación (5.10) entre los vectores velocidad respecto de sistemas de referencia con traslación relativa, es claro entonces, que los vectores velocidad con que emergen cada una de las partículas, respecto del sistema de laboratorio, vendrán dados por las relaciones:

$$\vec{v}_{f1} = \vec{v}_c + \vec{v}'_{f1}$$

$$\vec{v}_{f2} = \vec{v}_c + \vec{v}'_{f2}$$



Que pueden representarse mediante un diagrama vectorial como el que se muestra en la imagen lateral.
Identificando la dirección de incidencia mediante un vector unitario (ε) y teniendo en cuenta las expresiones anteriores y las (5.42) es inmediato que las velocidades con que emergen las partículas, respecto del sistema de laboratorio pueden expresarse como:

$$\vec{v}_{f1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{01}\vec{\varepsilon} + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_{01}\vec{\eta} \qquad 5.43$$

$$\vec{v}_{f1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{01}\vec{\varepsilon} - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{01}\vec{\eta} \qquad 5.44$$

O bien como:

$$\vec{v}_{f1} = \frac{v_{01}}{m_1 + m_2}(m_1\vec{\varepsilon} + m_2\vec{\eta}) \qquad 5.45$$

$$\vec{v}_{f2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_{01}(\vec{\varepsilon} - \vec{\eta}) \qquad 5.46$$

Con lo que sus módulos vendrán dados por:

$$\vec{v}_{f1} = \frac{v_{01}}{m_1 + m_2}(m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\Psi)$$

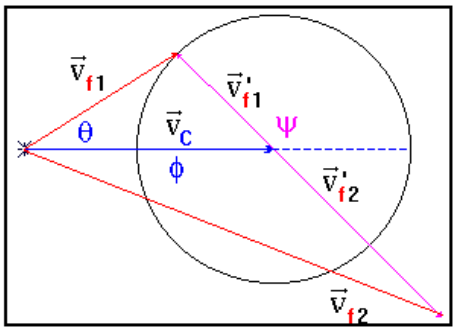
$$\vec{v}_{f2} = 2\frac{m_1 v_{01}}{m_1 + m_2}\operatorname{sen}(\Psi/2) \qquad 5.47$$

Y las relaciones entre las magnitudes angulares involucradas, serán:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 \operatorname{sen}\Psi}{m_1 + m_2\cos\Psi} \qquad \phi = \frac{1}{2}(\pi - \Psi) \qquad 5.48$$

Casos Particulares.
Suponiendo:

$$m_1 > m_2$$



De las anteriores resulta ($v_C > v'_{f1}$), por lo tanto si en una gráfica similar a la mostrada en la página anterior, se traza un círculo de radio coincidente con (v'_{f1}), el punto de impacto queda fuera de dicho círculo, con lo que el ángulo en que saldrá desviada la partícula incidente, no podrá superar aquel valor que, como se muestra en la figura lateral, resulta de la situación en la que el vector con el que caracterizamos su velocidad luego del impacto es tangente al círculo indicado, en cuyo caso:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{m_2}{m_1}$$

Por lo tanto para una situación como la indicada y desde el sistema de laboratorio, no será posible observar una retrodisperción de la partícula incidente, fenómeno que si podrá observarse desde el sistema centroidal y corresponderá al caso en el que la partícula blanco

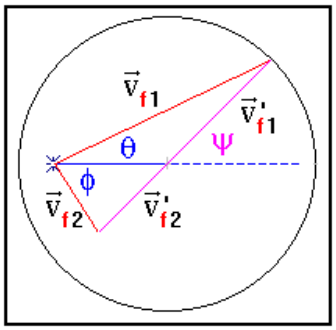
sale disparada en la dirección de la partícula incidente y por lo tanto ($\eta = -\varepsilon$), en cuyo caso de (5.45) y (5.46), resulta:

$$\vec{v}_{f1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{01} \qquad \vec{v}_{f2} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{01}$$

Que en adelante reconoceremos como una **colisión frontal.**

Suponiendo:

$$m_1 < m_2$$

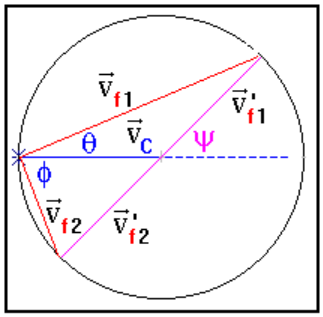


En este caso ($v_C < v'_{f1}$), y por lo tanto en una representación como la indicada anteriormente, el punto de impacto quedará en el interior del círculo, como se sugiere en la figura lateral.
A diferencia de lo observado en el caso anterior, en esta oportunidad y ante una colisión frontal si será posible observar retrodisperción de la partícula incidente desde ambos sistemas y con una velocidad respecto del sistema de laboratorio que vendrá expresada por:

$$\vec{v}_{f1} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{01}$$

Suponiendo:

$$m_1 = m_2$$



En esta oportunidad ($v_C < v'_{f1}$), con lo que el punto de impacto coincidirá con uno de los puntos de la circunferencia a que hacemos referencia en las representaciones anteriores, resultando así una situación como la mostrada en la figura lateral, donde de (5.45) y (5.46), resulta:

$$\vec{v}_{f1} = \frac{v_{01}}{2}(\vec{\varepsilon} + \vec{\eta})$$

$$\vec{v}_{f2} = \frac{v_{01}}{2}(\vec{\varepsilon} - \vec{\eta})$$

Con lo que ante una colisión frontal de las anteriores es claro que la partícula incidente quedará detenida y la partícula blanco saldrá disparada con la velocidad de la incidente, fenómeno que a menudo podemos observarlo en un juego de billar.
Finalmente, para la situación que estamos considerando y teniendo en cuenta las expresiones anteriores, resulta interesante observar que al finalizar la colisión los vectores velocidad de cada una de las partículas serán tales que se anula el producto escalar entre ambos, esto es:

$$\vec{v}_{f1} \cdot \vec{v}_{f2} = 0$$

Con lo que, las trayectorias de emergencia, vistas desde el sistema de laboratorio, serán ortogonales, lo que a menudo podemos observarlo en un juego de billar, como lo podrá apreciar en el video **Colisiones.wmv** que se recomienda ejecutar.
Como adecuadas ilustraciones de los temas considerados, se recomiendan las simulaciones a las que puede acceder mediante los archivos **Colision-1.htm** y **Colision-2.htm** incluidos en las carpetas del mismo nombre.