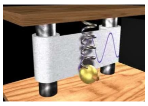
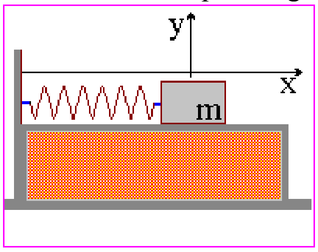
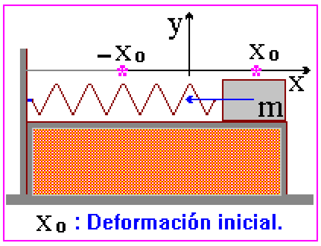


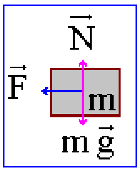
2.05 OSCILACIONES LIBRES I

Consideremos el caso de un muelle lineal que interactúa con un cuerpo como se muestra en la primera de las figuras siguientes, y supongamos que mediante una interacción externa apartamos al sistema de su posición de equilibrio sometiendo el muelle a una deformación inicial como la sugerida en la segunda figura, para luego dejarlo en libertad de desplazarse a lo largo de la superficie horizontal a la que imaginaremos libre de rozamiento.





Bajo estas condiciones las fuerzas a que se verá sometido el cuerpo serán las indicadas en el diagrama lateral, que resultan de su interacción con el campo gravitatorio, con el muelle y con la superficie horizontal, con lo que la ecuación de Newton para el centro de masa del cuerpo nos queda expresada como:



$$\vec{F} + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Con el propósito de evaluar las componentes de esta ecuación emplearemos en un sistema de ejes cartesianos como el indicado en las figuras anteriores, donde suponemos al origen coincidente con la posición en la que el centro de masa del cuerpo está en equilibrio, que en este caso es coincidente con aquella posición en la que el resorte está sin deformar y por lo tanto, la deformación del resorte coincidirá en todo momento con la coordenada horizontal del centro de masa del cuerpo, con lo que la fuerza a la que se verá sometido como resultado de su interacción con el muelle puede expresarse como:

$$\vec{F} = -k\,x\,\vec{i}$$

Que nos muestra una interesante semejanza con la forma que caracteriza a una fuerzas elástica, en cuyo caso dicha magnitud vendrá dada por:

$$\vec{F} = -k\,\vec{r}$$

Siendo éste el motivo por el que a la constante del muelle la conocemos como constante elástica. Sin embargo debe observarse que existe una importante diferencia entre estas dos fuerzas, mientras la primera siempre es de naturaleza atractiva, la que resulta de la interacción con el muelle lineal será atractiva cuando la coordenada sea positiva o sea cuando el muelle está elongado y tendrá sentido opuesto cuando el muelle está comprimido, esto es cuando dicha coordenada es negativa.

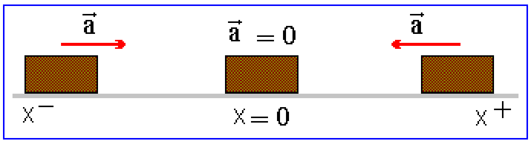
Teniendo en cuenta lo mencionado, al evaluar la componente horizontal de la ecuación vectorial planteada inicialmente obtenemos la ecuación escalar que se indica a continuación:

$$-k\,x = m\,\ddot{x}$$

De donde:

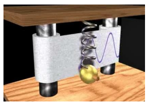
$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\,x$$

Resultando que la aceleración del cuerpo variará con su coordenada horizontal como se sugiere en la figura lateral.



Teniendo en cuenta la expresión obtenida para la aceleración en función de la coordenada espacial y separando variables, resulta:

$$\dot{x}\,d\dot{x} = -\frac{k}{m}\,x\,dx$$



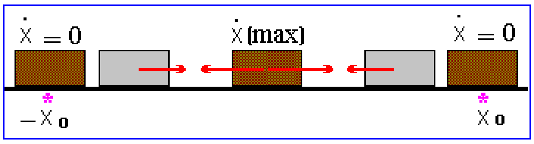
Integrando la anterior entre límites compatibles, que tengan en cuenta las condiciones iniciales, obtenemos:

$$\int_{\circ}^{\dot{x}} \dot{x}\, d\dot{x} = -\frac{k}{m}\int_{x_o}^{x} x\, dx$$

De donde, luego de efectuar las integraciones en ambos miembros, resulta:

$$\dot{x}^2 = \frac{k}{m}\left(x_\circ^2 - x^2\right)$$

Por lo tanto, el movimiento estará acotado entre dos valores extremos de la coordenada horizontal, dados por el valor de la deformación inicial del muelle, como se sugiere en la figura lateral.



Resultando así una interesante similitud con la situación planteada al considerar el comportamiento de una partícula en un túnel diametral en el interior de un planeta, por lo que procediendo de manera semejante obtendremos que la coordenada horizontal variará con el tiempo según:

$$x(t) = x_\circ \cos(wt)$$

Por lo tanto se tratará de un movimiento en donde el cuerpo oscila alrededor de su posición de equilibrio con una frecuencia angular y un período dados por:

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

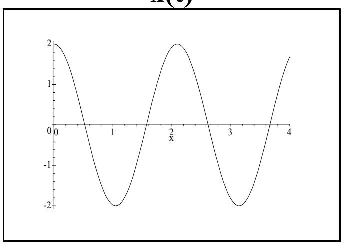
En el que la velocidad del centro de masa del cuerpo y su aceleración variarán con el tiempo según:

$$v(t) = -x_\circ w \,\mathrm{sen}(wt)$$

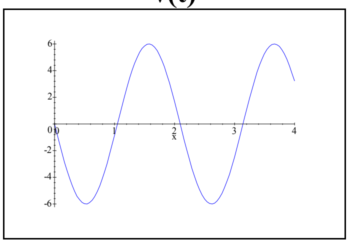
$$a(t) = -x_\circ w^2 \cos(wt)$$

Resultando para las funciones obtenidas gráficas cualitativas similares a las mostradas en la aplicación mencionada anteriormente y que se reiteran a continuación.

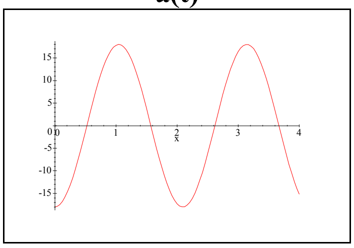
x(t)



v(t)



a(t)



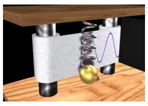
Laboratorio Virtual VII

Determinación Dinámica de la Constante Elástica de un Muelle.

La segunda simulación incluida en la página a la que se hace referencia anteriormente, le permitirá, mediante el cronómetro incluido en dicha simulación, determinar el período con el que oscilan cuerpos de diferentes **masas** suspendidos a un muelle y con los valores obtenidos deberá:

- Representar el cuadrado del período en función de la masa suspendida.
- Trazar la recta que pasando por el origen, mejor ajuste al conjunto de puntos obtenidos.
- Determinar la constante elástica del muelle, teniendo en cuenta que para la situación en consideración, dicho período vendrá dado por:

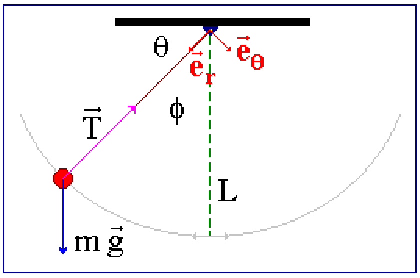
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} m$$



Con el propósito de mejorar la calidad de los resultados y para cada masa suspendida, se recomienda determinar el tiempo en el que se completan diez oscilaciones consecutivas y a partir de este valor obtener el período con el que ha oscilado el sistema.
Con el propósito de realizar comparaciones y mediante el icono “Nuevo” ofrecido en la simulación, podrá modificar aleatoriamente la constante elástica del muelle, que deberá determinar mediante el procedimiento recientemente indicado.

2.06 PÉNDULO PUNTUAL.

Como una aplicación, consideremos un sistema formado por un cuerpo suspendido de una cuerda inextensible y de masa despreciable, en donde las dimensiones de dicho cuerpo son menores que el error con que se determina la longitud de la cuerda que lo sujeta, como el que se muestra en la figura lateral y que conocemos como Péndulo Puntual.



Suponiendo que el sistema se aparta de la posición de equilibrio, manteniendo la cuerda extendida para luego dejarlo en libertad, es claro que para un instante posterior cualquiera, la partícula se desplazará a lo largo de un arco de circunferencia de radio (L) y estará sometida al conjunto de fuerzas que se indican en la figura anterior, consecuencias de la interacción gravitatoria y de la interacción con la cuerda, con lo que la ecuación de Newton para la partícula suspendida nos queda:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Que evaluada en componentes según las direcciones polares indicadas en la figura anterior, nos proporciona las siguientes ecuaciones escalares:

$$\vec{e}_r\rangle \quad mg\,\mathrm{sen}\,\theta - T = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

$$\vec{e}_\theta\rangle \quad mg\cos\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$$

Teniendo en cuenta que la distancia de la partícula al polo (punto de sustentación) permanece constante e igual a la longitud (L) de la cuerda, de las anteriores resulta:

$$\vec{e}_r\rangle \quad mg\,\mathrm{sen}\,\theta - T = -mL\dot{\theta}^2$$

$$\vec{e}_\theta\rangle \quad mg\cos\theta = mL\ddot{\theta}$$

Con lo que de la componente transversal obtenemos que la coordenada angular de la partícula vendrá expresada por una función del tiempo por la solución de la ecuación:

$$\ddot{\theta} = -\left(\frac{g}{L}\right)\cos\theta$$

Que en términos de la coordenada angular (ϕ), determinada a partir de la posición de equilibrio nos queda:

$$\ddot{\phi} = -\left(\frac{g}{L}\right)\mathrm{sen}\,\phi$$

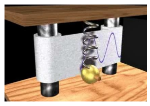
Solución Aproximada para Oscilaciones con Pequeñas Amplitudes.

Suponiendo que en el instante inicial, y durante el intervalo de tiempo de interés la coordenada angular involucrada en la expresión anterior es “pequeña” de manera que sea válida la aproximación:

$$\mathrm{sen}\,\phi \cong \phi$$

Entonces, bajo estas condiciones la coordenada angular que describe el comportamiento de la partícula deberá ser una función tal que sea solución de la ecuación:

$$\ddot{\phi} = -\left(\frac{g}{L}\right)\phi$$



Que como podemos notar es formalmente similar a la ecuación resuelta al considerar, en el tema anterior, las oscilaciones libres de un cuerpo que interactua con un muelle lineal y que se reitera a continuación.

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\,x$$

Con lo que las conclusiones logradas en aquella oportunidad serán válidas para la situación en consideración y por lo tanto la coordenada angular variará en el tiempo según:

$$\phi = \phi_{\circ}\cos(wt)$$

Donde la frecuencia angular vendrá dada por:

$$w = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Y por lo tanto la partícula oscilará alrededor de su posición de equilibrio con un período dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Siendo interesante destacar que en el tratamiento no se ha considerado la fuerza que resulta de la interacción con la atmósfera, que de considerarse daría lugar a un movimiento oscilatorio con una amplitud decreciente, que será tratado posteriormente en este capítulo.
Asimismo es importante mencionar que la solución lograda recientemente es solamente una **adecuada aproximación,** útil en el tratamiento de algunas situaciones de interés como la que consideraremos en la experiencia virtual que se recomienda al final del tema.

Solución General para el Período de un Péndulo Puntual.
Considerando nuevamente la ecuación.

$$\ddot{\phi} = -\left(\frac{g}{L}\right)\operatorname{sen}\phi$$

Es posible demostrar que el período con el que oscilará el péndulo vendrá dado por:

$$T = 2\pi\left(\frac{L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{4}k^{2}+\frac{9}{64}k^{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

Donde la constante (k) depende de la amplitud con la que oscila el sistema, según:

$$k = \operatorname{sen}\left(\frac{\phi_{\circ}}{2}\right)$$

Con lo que vemos que en general el período de un péndulo dependerá de la amplitud con la oscila alrededor de su posición de equilibrio.
Considerando nuevamente aquella situación en la que es válida la aproximación:

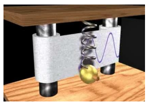
$$\operatorname{sen}\phi \cong \phi$$

De la expresión recientemente obtenida para el período del péndulo, resulta que bajo estas condiciones, la mencionada magnitud vendrá dada por:

$$T = 2\pi\left(\frac{L}{g}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{16}\phi_{\circ}^{2}+\frac{9}{1024}\phi_{\circ}^{4}+\ldots\ldots\ldots\ldots\right)$$

Que como podemos notar no coincide con la obtenida anteriormente bajo las mismas condiciones.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$



Motivo por el que cuando la obtuvimos, mencionamos que solo se trataba de una adecuada aproximación al período de un péndulo puntual que oscila con pequeñas amplitudes, ya que cuando la amplitud de la oscilación es tal que el segundo término del desarrollo en serie de potencias es inferior al error con el que deseamos determinaremos el período de las oscilaciones, dicho término y los restantes podrán despreciare y considerar al período dado por la expresión anterior.

Laboratorio Virtual VIII
Determinación de "g" mediante un Péndulo Puntual.
Mediante la primera simulación que se ofrece en la página a la que puede acceder ejecutando el archivo **Péndulo.htm**, podrá determinar el período con el que oscilan péndulos de diferentes longitudes en diferentes planetas de nuestro sistema, con lo que deberá obtener la aceleración de la gravedad en la superficie de la Tierra, la Luna y Júpiter, para lo cual en cada uno de los planetas mencionados y luego de determinar el período de por lo menos siete péndulos de longitudes diferentes, deberá:

- Representar el cuadrado del período en función de la longitud del péndulo empleado.
- Trazar la recta que, pasando por el origen, mejor ajuste al conjunto de puntos obtenidos.
- Determinar el valor de "g" en la superficie del planeta, teniendo en cuenta que para la situación en consideración, el período en cada péndulo vendrá dado por.

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g} L$$

Laboratorio Virtual IX
Variaciones del Período con la Amplitud con que Oscila un Péndulo Puntual.
Mediante la segunda simulación ofrecida en la página mencionada anteriormente podrá determinar el período de un péndulo puntual, para diferentes valores de la amplitud con la que oscila alrededor de su posición de equilibrio y con los valores obtenidos podrá verificar la dependencia entre ambas magnitudes, tal como lo prevé la expresión general obtenida para dicha magnitud.

2.07 OSCILACIONES LIBRES II

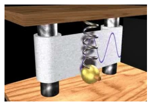
En esta oportunidad consideraremos un nuevo tratamiento de la situación planteada en el tema (2.05) con el propósito de presentar una manera mas interesante de obtener la función que me permite describir el comportamiento del sistema, o sea de obtener una expresión para la coordenada espacial en función del tiempo, que sea solución de la ecuación:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}\, x$$

Que en adelante reconoceremos como ecuación diferencial del movimiento, en tanto y en cuanto en ella intervienen la función y su segunda derivada y que para buscar su solución expresaremos como:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\, x(t) = 0$$

Siendo nuestro problema, encontrar una expresión para la coordenada horizontal en función del tiempo, tal que empleada en la anterior junto con su derivada temporal segunda, se satisfaga la igualdad indicada, en cuyo caso diremos que la expresión encontrada es una solución de la ecuación diferencial planteada, que recordemos resultó al evaluar en componentes cartesianas la ecuación de Newton para el movimiento del centro de masa del cuerpo, y por lo tanto es claro que la mencionada solución nos permitirá describir las características del movimiento de dicho punto según la dirección horizontal.
A los efectos de obtener la función que nos permitirá describir las características del movimiento del centro de masa del cuerpo una vez que lo dejamos en libertad y con el propósito de darle mas generalidad al tema, supondremos que al dejarlo en libertad lo



hacemos de manera que tanto la posición como la velocidad de su centro de masa no son nulas y con miras a simplificar el manejo algebraico futuro definiremos la magnitud:

$$w^2 = \frac{k}{m}$$

En términos de la cual nuestra ecuación diferencial original nos queda:

$$\ddot{x} + w^2 x = 0$$

Como solución de ésta ecuación diferencial propondremos una función del tipo exponencial.

$$x(t) = Ce^{qt}$$

Donde (C y q) son constantes que deberemos determinar a los efectos de que la función propuesta sea efectivamente solución de nuestra ecuación diferencial.
Con este propósito reemplazaremos la función y su derivada segunda en dicha ecuación, con lo que obtenemos que las constantes involucradas deberán ser tales que:

$$q^2 + w^2 = 0$$

Por lo tanto, la función exponencial propuesta será solución de nuestra ecuación diferencial cualquiera sea el valor de la constante (C), con la condición de que la constante (q) sea solución de la ecuación algebraica anterior, y que por lo tanto tome alguno de los valores que se indican a continuación:

$$q = \pm\sqrt{-\,w^2}$$

Que en términos de la unidad imaginaría podemos expresar como:

$$q = \pm\, i\, w$$

Teniendo en cuenta las conclusiones obtenidas, resulta que las funciones:

$$x(t) = C_1 e^{iwt} \qquad\qquad x(t) = C_2 e^{-\,iwt}$$

Serán soluciones de nuestra ecuación diferencial, a las que en adelante identificaremos como soluciones particulares en cuanto a que como veremos a lo largo del tema, cada una de ellas permitirá describir situaciones asociadas con condiciones iniciales diferentes, pudiendo demostrarse por simple sustitución, que una combinación lineal de las mismas también será solución de nuestra ecuación diferencial, la que nos permitirá describir el comportamiento mas general posible del sistema, motivo por lo que en adelante reconoceremos a esta como la solución general de nuestra ecuación diferencial.

$$x(t) = C_1 e^{iwt} + C_2 e^{-\,iwt}$$

Donde (C_1 y C_2) son constantes que deberemos determinar y que como veremos estarán directamente relacionadas con las condiciones iniciales de nuestro problema.
Con el propósito de darle otra forma a la función obtenida, veremos de expresarla en término de funciones trigonométricas, teniendo en cuenta que en general y de acuerdo con la relación de Euler, las exponenciales pueden relacionarse con dichas funciones mediante:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta$$

Con lo que la solución general de nuestra ecuación diferencial puede expresarse en término de funciones trigonométricas, como:

$$x(t) = (C_1 + C_2)\cos(wt) + i(C_1 - C_2)\,\mathrm{sen}(wt)$$

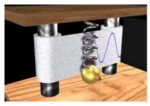
Que en término de las nuevas constantes:

$$A_1 = (C_1 + C_2) \quad \text{y} \quad A_2 = i(C_1 - C_2)$$

Puede expresarse como:

$$x(t) = A_1\cos(wt) + A_2\,\mathrm{sen}(wt)$$

Que recordemos nos proporciona una expresión en función del tiempo, para la posición del centro de masa del cuerpo en término de dos nuevas constantes, que como veremos



dependerán de las condiciones iniciales asociadas con la posición y velocidad del centro de masa en el instante en que dejamos al sistema en libertad, sometido a la interacción elástica.
Derivando temporalmente la anterior es claro que estamos en condiciones de obtener expresiones generales para la velocidad y aceleración del centro de masa del cuerpo en función del tiempo y en término de las constantes mencionadas en el párrafo anterior, resultando:

$$\dot{x}(t) = -A_1 w \operatorname{sen}(wt) + A_2 w \cos(wt)$$

$$\ddot{x}(t) = -\left[A_1 w^2 \cos(wt) + A_2 w^2 \operatorname{sen}(wt)\right]$$

Como ya lo mencionáramos en varias oportunidades, las características del movimiento de un cuerpo dependerán de las interacciones a que está sometido así como de las condiciones iniciales correspondientes a la situación planteada. En la solución obtenida no queda lugar a dudas que las interacciones están presentes, a través de la masa involucrada y de la constante elástica del muelle incluidas en (w), en cuanto a las condiciones iniciales, veremos que de estas dependerán las constantes (A_1 y A_2) incluidas en nuestra solución y que en adelante reconoceremos como **Constantes de Integración.**
Con el propósito de obtener expresiones para dichas constantes, en término de las condiciones iniciales, observemos que la solución lograda para nuestra ecuación diferencial deberá ser capaz de describir el comportamiento del sistema en cualquier instante, en particular, **en el instante inicial.** Requiriendo que las funciones anteriores satisfagan esta condición, esto es que en:

$$t = 0 \qquad x = x_\circ \qquad \dot{x} = \dot{x}_\circ$$

Resulta que las constantes involucradas en la solución, deberán ser tales que:

$$A_1 = x_\circ \qquad y \qquad A_2 = \frac{\dot{x}_\circ}{w}$$

Con lo que la solución general de nuestro problema, en función del tiempo y en término de las condiciones iniciales, nos queda:

$$x(t) = x_\circ \cos(wt) + \frac{\dot{x}_\circ}{w} \operatorname{sen}(wt)$$

$$\dot{x}(t) = -x_\circ w \operatorname{sen}(wt) + \dot{x}_\circ \cos(wt)$$

$$\ddot{x}(t) = -\left[x_\circ w^2 \cos(wt) + \dot{x}_\circ w \operatorname{sen}(wt)\right]$$

Situaciones Particulares.
Consideraremos a continuación la situación particular que resulta de suponer que al sistema se lo deja en libertad con el resorte deformado y el cuerpo en reposo, en cuyo caso de las anteriores obtenemos:

$$x(t) = x_\circ \cos(wt)$$

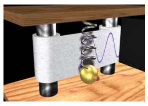
$$\dot{x}(t) = -x_\circ w \operatorname{sen}(wt)$$

$$\ddot{x}(t) = -x_\circ w^2 \cos(wt)$$

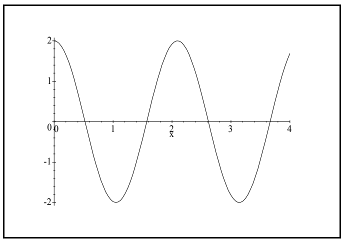
Que claramente corresponde a un movimiento oscilatorio con una amplitud constante, determinada por la posición del cuerpo en el instante inicial, (coincidente con la deformación del resorte en dicho instante) y con un período dado por:

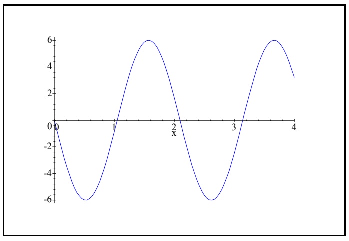
$$T = \frac{2\pi}{w} \qquad \therefore \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

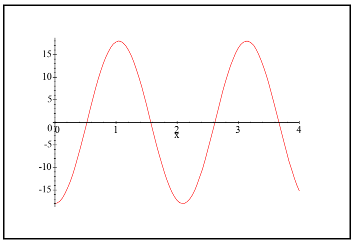
Con gráficas temporales para las funciones obtenidas como las que se muestran a continuación:



$x(t)$ $\dot{x}(t)$ $\ddot{x}(t)$







Otra situación particular de interés es aquella que resulta de dar al cuerpo una velocidad inicial cuando se encuentra en reposo y en su posición de equilibrio, (con el muelle sin deformar) resultando entonces las siguientes expresiones para la posición, velocidad y aceleración del centro de masa del cuerpo:

$$x(t) = \frac{\dot{x}_\circ}{w}\,\mathrm{sen}(wt)$$

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_\circ \cos(wt)$$

$$\ddot{x}(t) = -\dot{x}_\circ w\,\mathrm{sen}(wt)$$

Que nuevamente corresponde a un movimiento periódico con un período coincidente con el obtenido en el caso anterior y con una amplitud claramente dependiente de la velocidad inicial y de los parámetros que caracterizan el sistema, esto es, de la constante elástica y de la masa del cuerpo considerado.

Otra Forma de Expresar la Solución General.
Teniendo en cuenta la relación que vincula el seno de la suma de dos ángulos con los senos y cosenos de dichas magnitudes puede obtenerse una forma muy conveniente para la solución general de nuestro problema, en términos de dos nuevas constantes, dependientes claro está, de las condiciones iniciales involucradas, resultando:

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(wt + \delta)$$

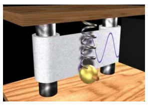
En cuyo caso las nuevas constantes nos quedan relacionadas con las anteriores y por lo tanto con las condiciones iniciales, a través de las expresiones que se indican a continuación:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 \quad \therefore \quad A^2 = x_\circ^2 + \left(\frac{\dot{x}_\circ}{w}\right)^2$$

$$\mathrm{tg}(\delta) = \frac{A_1}{A_2} \quad \therefore \quad \mathrm{tg}(\delta) = \frac{x_\circ w}{\dot{x}_\circ}$$

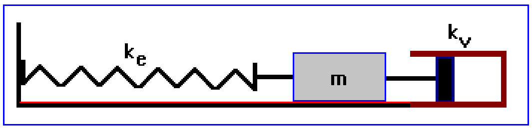
Siendo oportuno mencionar que esta forma de expresar la solución puede resultar ventajosa respecto de la anterior en aquellas situaciones en las que, a diferencia de las consideradas en los casos particulares anteriores, ninguna de las condiciones iniciales es nula.
Como una ilustración del tema y ejecutando el archivo **Libres.htm** incluido en la carpeta del mismo nombre, podrá acceder a una simulación destinada a ilustrar diferentes aspectos tratados a lo largo del tema considerado, donde, para diferentes condiciones iniciales podrá observar gráficas de la posición en función del tiempo y de la velocidad en función de la posición del cuerpo.

Figuras de Lissajous.
Ejecutando el archivo **Lissajous.htm** incluido en la carpeta del mismo nombre, podrá acceder a una simulación, cuya teoría se recomienda consultar, destinada a ilustrar el movimiento que resulta como consecuencia de la superposición de dos movimientos armónicos simples con frecuencias angulares o fases iniciales diferentes.

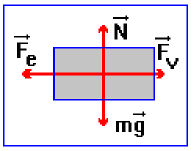


2.08 OSCILACIONES AMORTIGUADAS.

Consideraremos a continuación el caso de un cuerpo sometido a una fuerza elástica, resultante de su interacción con un muelle y a una fuerza del tipo viscosa, directamente proporcional a su velocidad, como consecuencia de su interacción con algún mecanismo que la proporciona, como el sugerido en la figura, siendo ésta un diagrama muy simplificado de lo que podría ser el sistema de amortiguación de un automóvil.



Suponiendo que el sistema se aparta de su posición de equilibrio y se lo deja en libertad, se verá sometido a un conjunto de fuerzas externas como las indicadas en el diagrama siguiente, que resultan de la interacción con el muelle, con la superficie horizontal, a la que suponemos libre de rozamiento, con el amortiguador y con el campo gravitatorio, con lo que la ecuación de Newton para el centro de masa del cuerpo nos queda:



$$\vec{F}_v + \vec{F}_e + \vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Evaluando las componentes según las direcciones de un sistema cartesiano como el considerado en el tema anterior, la fuerza viscosa y la fuerza elástica a la que se verá sometido el cuerpo podrán ser expresadas como:

$$\vec{F}_v = -k_v\dot{x}\,\vec{i} \qquad \vec{F}_e = -k_e x\,\vec{i}$$

Con lo que de la componente horizontal de la ecuación de Newton para el centro de masa del cuerpo, obtenemos la siguiente ecuación diferencial.

$$-k_v\dot{x} - k_e x = m\ddot{x}$$

Dividiendo ambos miembros por la masa y definiendo la constante de amortiguación como:

$$\lambda = \frac{k_v}{2m}$$

Y la **frecuencia natural** del sistema, como la frecuencia con la que oscilaría dicho sistema en ausencia de la fuerza viscosa:

$$w_\circ^2 = \frac{k_e}{m}$$

La ecuación diferencial nos queda expresada como:

$$\ddot{x} + 2\lambda\,\dot{x} + w_\circ^2 x = 0$$

Proponiendo nuevamente una solución del tipo exponencial:

$$x(t) = Ce^{qt}$$

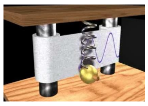
Y reemplazando la función propuesta y sus derivadas temporales en la ecuación diferencial, resulta que la constante (C) podrá tomar cualquier valor siempre que la constante (q) sea una solución de la ecuación algebraica.

$$q^2 + 2\lambda\,q + w_\circ^2 = 0$$

De donde resulta que los valores posibles para la mencionada constante serán:

$$q = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - w_\circ^2}$$

Por lo tanto, la solución general de nuestra ecuación diferencial vendrá expresada como una combinación lineal de las soluciones particulares, que se obtienen al considerar cada una de las raíces resultantes de la expresión anterior, con lo que las características del movimiento dependerán fuertemente de la relación que exista entre las constantes que caracterizan el sistema, resultando así las situaciones particulares que se detallan a continuación.



Movimiento Oscilatorio Amortiguado.
Resulta de suponer un cierto predominio de la fuerza elástica sobre la fuerza disipativa y corresponde al caso en el que la constante de amortiguación es inferior a la frecuencia natural del sistema, o sea cuando:

$$\lambda < w_\circ \quad \therefore \quad k_v < 2\sqrt{mk_e}$$

Con lo que, las raíces de la ecuación cuadrática pueden expresarse como:

$$q = -\lambda \pm i\sqrt{w_\circ^2 - \lambda^2}$$

Que en términos de una nueva constante podemos indicar como:

$$q = -\lambda \pm i\Omega \qquad \text{Donde:} \quad \Omega = \sqrt{w_\circ^2 - \lambda^2}$$

Con lo que la solución general de nuestra ecuación diferencial, para la situación en consideración, nos queda expresada como:

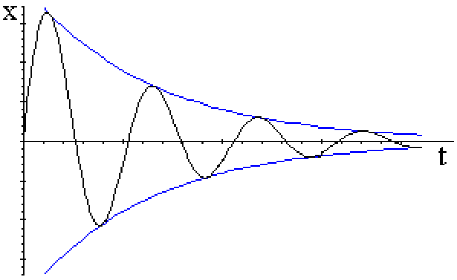
$$x(t) = e^{-\lambda t}\left[C_1 e^{i\Omega t} + C_2 e^{-i\Omega t}\right]$$

Comparando la función encerrada entre corchetes con la solución general que obtuviéramos en el caso oscilatorio tratado anteriormente, es claro que operando de la misma manera con dicha función, la solución de nuestra ecuación diferencial actual, puede expresarse en término de dos nuevas constantes dependientes de las condiciones iniciales, como:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\,\text{sen}(\Omega\ t + \delta)$$

Resultando así un movimiento oscilatorio, con una frecuencia menor que la natural del sistema y con una amplitud que decae exponencialmente con el tiempo como se muestra cualitativamente en la figura siguiente, que en adelante reconoceremos como movimiento oscilatorio amortiguado, cuyo período vendrá dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{w_\circ^2 - \lambda^2}}$$



Obviamente mayor que el correspondiente al caso libre de amortiguamiento considerado en el tema anterior, siendo oportuno observar que la solución obtenida en dicha oportunidad es en realidad un caso particular de la lograda recientemente.

Movimiento Sobre Amortiguado.
Corresponde al caso en que predomina el amortiguamiento sobre la fuerza de restauración elástica, o sea cuando:

$$\lambda > w_\circ \quad \therefore \quad k_v > 2\sqrt{mk_e}$$

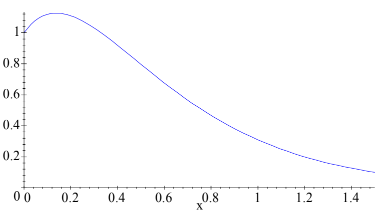
En cuyo caso, las raíces de la ecuación cuadrática resultaran reales, distintas y ambas negativas, como lo podemos observar al expresarlas según se indica a continuación:

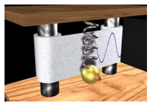
$$q_1 = -\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - w_\circ^2}\right) \quad \text{y} \quad q_2 = -\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - w_\circ^2}\right)$$

Con lo que la solución general quedará expresada como:

$$x(t) = C_1 e^{q_1 t} + C_2 e^{q_2 t}$$

Teniendo en cuenta que los exponentes son ambos negativos, resulta un movimiento no oscilatorio y fuertemente amortiguado como se sugiere en la figura lateral, donde hemos supuesto que en el instante inicial el cuerpo se deja en libertad con una velocidad tal que durante un pequeño intervalo de tiempo genera un incremento en la deformación del muelle.





Movimiento con Amortiguación Crítica.
Corresponde a la situación que resta por tratar, o sea cuando:

$$\lambda = w_\circ \quad \therefore \quad k_v = 2\sqrt{mk_e}$$

En cuyo caso las raíces de la ecuación cuadrática son reales e iguales:

$$q_1 = q_2 = -\lambda$$

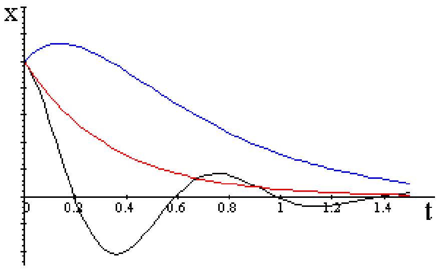
Situación en la que puede verificarse por simple sustitución, que otra solución particular de nuestra ecuación diferencial viene dada por:

$$x(t) = C\,t\,e^{-\lambda t}$$

Con lo que la solución general puede expresarse como:

$$x(t) = C_1 e^{-\lambda t} + C_2\, t\, e^{-\lambda t}$$

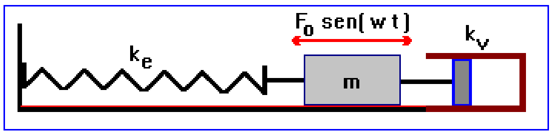
Resultando para las situaciones consideradas, gráficas temporales cualitativas como las que se muestran en la figura que siguiente.



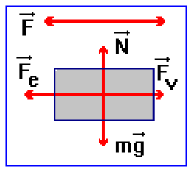
Finalmente, como una adecuada ilustración del tema considerado se recomienda la simulación **Amortiguadas**.

2.09 OSCILACIONES FORZADAS SENOIDALMENTE.

Consideraremos ahora, un sistema como el tratado anteriormente en el que además supondremos que el cuerpo está sometido a una excitación del tipo senoidal, como se sugiere en la figura siguiente.



Con lo que el diagrama de cuerpo aislado y la componente horizontal de la ecuación de Newton para el centro de masa del cuerpo resultan:



$$\ddot{x} + 2\lambda\,\dot{x} + w_\circ^2 x = f_\circ\,\mathrm{sen}(wt)$$

Donde:

$$\lambda = \frac{k_v}{2m} \qquad w_\circ^2 = \frac{k_e}{m} \qquad f_\circ = \frac{F_\circ}{m}$$

Para una situación como ésta, puede demostrarse que la solución general de la ecuación diferencial, claramente no homogénea, se obtiene como la suma de la solución general de la homogénea, mas una solución particular de la no homogénea, esto es:

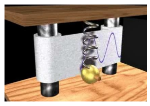
$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

Donde la solución de la homogénea, sin lugar a dudas, es la obtenida en el tema anterior.

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\,\mathrm{sen}(\Omega\ t + \delta)$$

Como solución particular de nuestra ecuación diferencial propondremos una función como la que se indica a continuación:

$$x_P(t) = B_1\,\mathrm{sen}(wt) + B_2\cos(wt)$$



Donde la frecuencia coincide con la frecuencia de excitación y donde los coeficientes deberán ser determinados para garantizar que la función propuesta sea efectivamente una solución de la ecuación diferencial original. Con este propósito deberemos reemplazar en dicha ecuación, la función y sus derivadas temporales, con lo que y luego de operar algebraicamente, obtenemos que los coeficientes deberán ser tales que:

$$\left[B_1(w_\circ^2 - w^2) + B_2 2\lambda w - f_\circ\right]\operatorname{sen}(wt) + \left[B_1 2\lambda w + B_2(w_\circ^2 - w^2)\right]\cos(wt) = 0$$

Puesto que la anterior deberá ser válida en todo instante, es claro que los factores que multiplican a las funciones trigonométricas deberán anularse, con lo que los coeficientes (Bi) deberán ser solución del sistema de ecuaciones:

$$B_1(w_\circ^2 - w^2) + B_2 2\lambda w = f_\circ$$

$$B_1 2\lambda w + B_2(w_\circ^2 - w^2) = 0$$

De donde resulta:

$$B_1 = \frac{f_\circ(w_\circ^2 - w^2)}{(w_\circ^2 - w^2) + (2\lambda w)^2} \qquad B_2 = \frac{2f_\circ\lambda w}{(w_\circ^2 - w^2) + (2\lambda w)^2}$$

Teniendo en cuenta ahora que, la solución particular puede ser expresada en término de dos nuevas constantes (B) y (ϕ), como se indica a continuación:

$$x_P(t) = B\operatorname{sen}(wt + \phi)$$

Donde las nuevas constantes están relacionadas con las anteriores mediante:

$$B^2 = B_1^2 + B_2^2$$

$$\operatorname{tg}\phi = \frac{B_2}{B_1}$$

Y donde el ángulo (ϕ) es el desfasaje entre la excitación y la solución particular propuesta, luego de tener en cuenta las expresiones logradas para la constantes anteriores en término de los parámetros originales, estas nuevas constantes nos quedan expresadas en término de dichas magnitudes, como:

$$B = \frac{f_\circ}{\sqrt{(w_\circ^2 - w^2) + (2\lambda w)^2}}$$

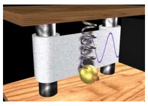
$$\operatorname{tg}\phi = \frac{2\lambda w}{w_\circ^2 - w^2}$$

Con lo que la solución general de nuestra ecuación diferencial, suma de la correspondiente a la homogénea mas la particular recientemente obtenida, vendrá dada por:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}\operatorname{sen}(\Omega\ t + \delta) + B\operatorname{sen}(wt + \phi)$$

Resultando entonces la superposición de una oscilación con amplitud constante (B) y frecuencia coincidente con la de excitación que perdurará en el tiempo, mas una función que se amortigua con el tiempo, que en adelante identificaremos como **estacionaria y transitoria,** respectivamente. Finalizado el mencionado estado transitorio, que notemos estará fuertemente relacionado con la amortiguación involucrada, el sistema alcanza el estado estacionario, que responde a una oscilación con amplitud constante y con una frecuencia coincidente con la de excitación, tal que la posición de la partícula variará con el tiempo según:

$$x(t) = B\operatorname{sen}(wt + \phi)$$

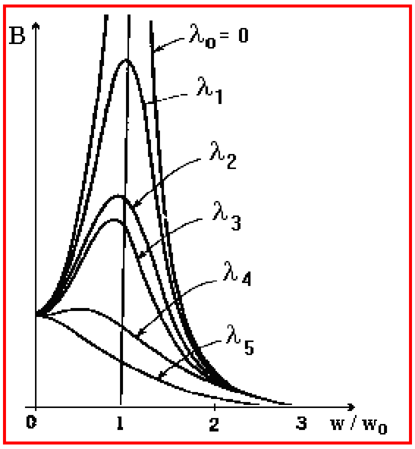


Resulta interesante observar que la **amplitud** del estado estacionario, dependerá fuertemente de la relación existente entre la frecuencia natural del sistema y la frecuencia de excitación, obteniéndose amplitudes muy importantes cuando la frecuencia de la excitación es coincidente con la frecuencia natural del sistema, en cuyo caso:

$$B = \frac{f_\circ}{2\lambda w}$$

Y el desfasaje entre la excitación del sistema y la respuesta del mismo, vendrá dado por:

$$\phi = \frac{\pi}{2}$$

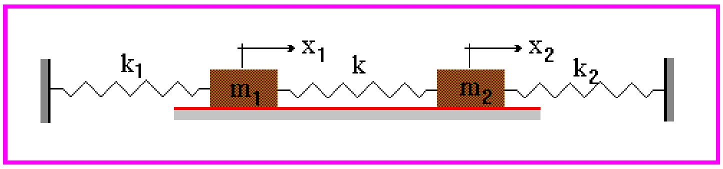


Situación que en adelante identificaremos como de **Resonancia,** siendo importante observar que en dicho estado, el valor de la amplitud dependerá inversamente de la constante de amortiguación, tendiendo a infinito si dicha constante tiende a la nulidad.
La figura lateral muestra gráficas cualitativas de la amplitud en el estado estacionario en función de la relación entre la frecuencia de excitación y la frecuencia natural del sistema, para diferentes valores de la constante de amortiguación.
Finalmente y como ilustración del tema se recomienda las simulaciones **Forzadas-1, Forzadas-2** y el video **Resonancia.**

2.10 OSCILACIONES DE SISTEMAS CON DOS GRADOS DE LIBERTAD.

Consideraremos a continuación las características de las oscilaciones de un sistema con dos grados de libertad como el sugerido en la figura siguiente, donde suponemos que ambos cuerpos tienen igual masa y la misma constante elástica para los resortes laterales.

$$m_1 = m_2 = m$$
$$k_1 = k_2 = k_\circ$$



Con el propósito de plantear las ecuaciones de movimiento, supongamos que apartamos al sistema de su posición de equilibrio y lo dejamos en libertad desde un punto en el que ambas coordenadas son positivas y tales que la primera es mayor que la segunda, en cuyo caso la ecuación de movimiento para el centro de masa de cada uno de los cuerpos vendrá dada por:

$$m\ddot{x}_1 = -k_\circ x_1 - k(x_1 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_2 = -k_\circ x_2 + k(x_1 - x_2)$$

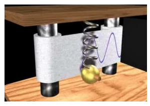
Sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, que puede expresarse como:

$$\ddot{x}_1 + \frac{k_\circ}{m}x_1 + \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0$$
$$\ddot{x}_2 + \frac{k_\circ}{m}x_2 - \frac{k}{m}(x_1 - x_2) = 0$$

Proponiendo soluciones del tipo:

$$x_1 = C_1\,\mathrm{sen}(pt + \alpha)$$
$$x_2 = C_2\,\mathrm{sen}(pt + \alpha)$$

Reemplazando en las ecuaciones diferenciales y operando algebraicamente, obtenemos que las constantes involucradas deberán ser tales que:



$$\left(-p^2+\frac{k_\circ}{m}+\frac{k}{m}\right)C_1-\frac{k}{m}C_2=0$$

$$-\frac{k}{m}C_1+\left(-p^2+\frac{k_\circ}{m}+\frac{k}{m}\right)C_2=0$$

Que tendrá solución distinta de la trivial si el determinante de sus coeficientes es nulo:

$$\begin{vmatrix} -p^2+\frac{k_\circ}{m}+\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -p^2+\frac{k_\circ}{m}+\frac{k}{m} \end{vmatrix}=0$$

De donde resulta que el parámetro (p) podrá tomar los valores:

$$p_1=\sqrt{\frac{k_\circ}{m}} \quad \text{y} \quad p_2=\sqrt{\frac{k_\circ}{m}+\frac{2k}{m}}$$

Que en adelante identificaremos como **frecuencias fundamentales,** las que como veremos estarán asociadas con diferentes modos de oscilación, que identificaremos como **modos fundamentales.**

Teniendo en cuenta la **primera solución** en cualquiera de las ecuaciones algebraicas, resulta que ambas constantes deberán ser iguales, con lo que las soluciones de nuestro sistema de ecuaciones diferenciales se puede expresar como:

$$x_1 = A\,\text{sen}(p_1 t+\alpha)$$

$$x_2 = A\,\text{sen}(p_1 t+\alpha)$$

modo lento

En cuyo caso, ambos cuerpos oscilarán en fase y con la misma amplitud, con lo que, en este modo, el resorte de acoplamiento no interviene en el movimiento, se comporta como si se tratara de una varilla rígida.

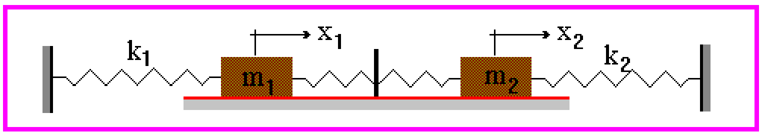
Teniendo en cuenta la segunda solución en cualquiera de las ecuaciones algebraicas resulta que las constantes deberán ser iguales pero de signo opuesto, con lo que:

$$x_1 = A\,\text{sen}(p_2 t+\alpha)$$

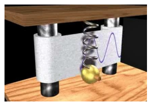
$$x_2 = -A\,\text{sen}(p_2 t+\alpha)$$

modo rápido

En cuyo caso, ambos cuerpos oscilaran con la misma frecuencia y amplitud pero desfasados en (180º) de manera que se mueven en sentido opuesto y el centro del resorte de acoplamiento permanece fijo, como si este punto estuviera rígidamente vinculado a una pared, como se sugiere en la figura siguiente y como lo podrá apreciar en la simulación a la que puede acceder ejecutando el archivo **Acoplados.htm** incluido en la carpeta del mismo nombre, donde dejando en libertad al sistema con amplitudes iguales, podrá observar las características con las que oscila en el modo lento y dejando en libertad al sistema con amplitudes iguales pero de signo opuesto, podrá observar las características del segundo modo.



En general y dependiendo de las condiciones iniciales, el movimiento de cada uno de los cuerpos quedará descripto por una combinación lineal de ambas soluciones, y en particular si suponemos que el sistema se deja en libertad a partir de una configuración en la que ambas masas están en reposo con posiciones distintas a las indicadas anteriormente, resulta:



$$x_1 = \frac{x_{01} + x_{02}}{2}\cos(p_1 t + \alpha) + \frac{x_{01} - x_{02}}{2}\cos(p_2 t + \alpha)$$

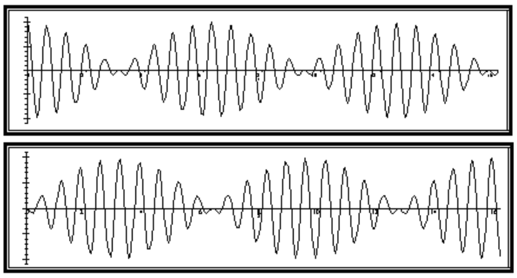
$$x_1 = \frac{x_{01} + x_{02}}{2}\cos(p_1 t + \alpha) - \frac{x_{01} - x_{02}}{2}\cos(p_2 t + \alpha)$$

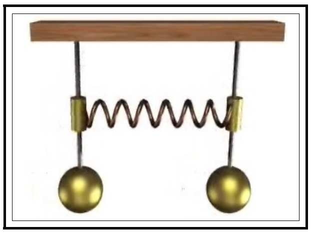
Suponiendo que en el instante inicial la coordenada del segundo cuerpo es nula, y teniendo en cuenta las relaciones trigonométricas para la suma y diferencia de cosenos con diferentes argumentos, de las anteriores se obtiene que en estas condiciones:

$$x_1 = x_{01}\cos\frac{p_1 - p_2}{2}t \cdot \cos\frac{p_1 + p_2}{2}t$$

$$x_2 = x_{01}\,\mathrm{sen}\,\frac{p_1 - p_2}{2}t \cdot \mathrm{sen}\,\frac{p_1 + p_2}{2}t$$

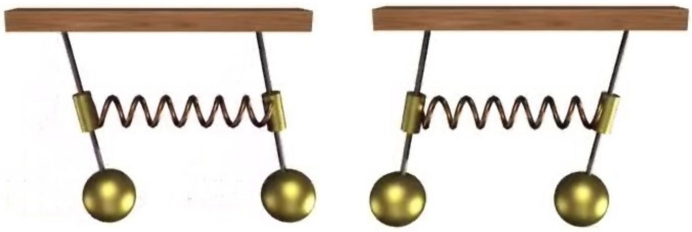
Cuyas gráficas temporales se muestran en las figuras laterales, donde puede observarse que cada cuerpo oscila con una **amplitud modulada** por una señal de menor frecuencia, y que existe un constante intercambio de energía entre los elementos que intervienen en el sistema, tal como lo podrá apreciar con toda claridad en la simulación indicada anteriormente, dejando al sistema en libertad con las condiciones iniciales establecidas para obtener la solución anterior.



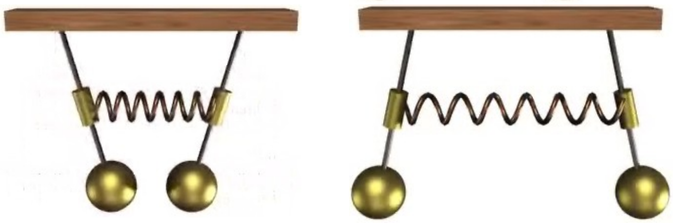


Péndulos Acoplados.

La figura lateral nos muestra un sistema como el que hemos considerado, formado por dos péndulos acoplados mediante un muelle, en donde los muelles laterales no existen.



Las imágenes laterales corresponden a dos instantes diferentes cuando el sistema oscila en el **modo lento.**



Mientras que estas otras imágenes corresponden a dos instantes diferentes cuando oscila en el **modo rápido.**

Tal como lo podrá apreciar en el video **Acoplados** que se recomienda ejecutar y de donde fueron extraídas las imágenes anteriores.