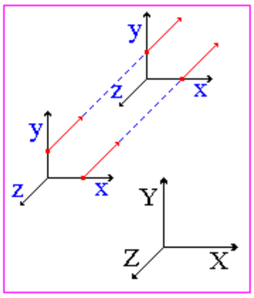
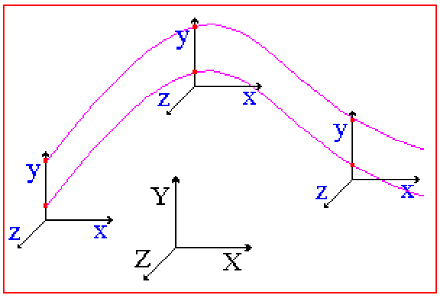
3.01 SISTEMAS DE REFERENCIA CON TRASLACIÓN RELATIVA.

Considerando dos sistemas de referencia como los indicados en las figuras, diremos que están animados de una traslación relativa cuando el estado de movimiento de todos los puntos rígidamente vinculados a uno de ellos está caracterizado en cada instante por el mismo vector velocidad, respecto del restante.

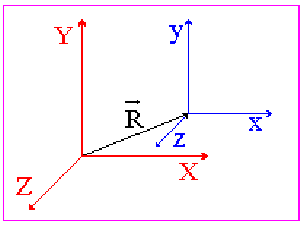




Lo mencionado claramente es equivalente o requiere, que las trayectorias a lo largo de la que se desplazan los puntos en consideración sean necesariamente paralelas, pudiendo tratarse de trayectorias rectas o no, en cuyo caso nos referiremos a una traslación rectilínea o curvilínea, respectivamente, como se sugiere en cada una de las situaciones que se muestran en las figuras anteriores.

Teniendo en cuenta que en un caso como el que estamos considerando, el estado de movimiento de todos los puntos rígidamente vinculados a un sistema está caracterizado por el mismo vector velocidad, esta magnitud será indudablemente la adecuada para caracterizar el estado de movimiento entre los sistemas, que en adelante identificaremos mediante el vector velocidad del origen de un sistema respecto del otro sistema en consideración.

Atendiendo lo mencionado, y como se indica en la figura siguiente, el estado de movimiento del sistema de referencia (xyz) que en adelante identificaremos como sistema de referencia auxiliar, respecto del sistema de referencia (XYZ), que en adelante identificaremos como sistema de referencia principal o fundamental, estará caracterizado por:



$$V_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{R}}{dt}\right]_{XYZ}$$

Análogamente, los cambios temporales en el estado de movimiento del sistema auxiliar, respecto del sistema de referencia principal, estarán caracterizados por:

$$A_{XYZ} = \left.\frac{dV}{dt}\right]_{XYZ}$$

Que reconoceremos como el vector aceleración del origen del sistema auxiliar, respecto del principal.

Finalmente, designando con (**i j k**) a los vectores unitarios que caracterizan las direcciones ortogonales (xyz) del sistema de referencia auxiliar, y teniendo en cuenta que como consecuencia de la traslación de dicho sistema respecto del sistema principal, las direcciones de los mencionados vectores unitarios no cambian en el tiempo, al ser observados desde este último sistema, entonces es inmediato que:

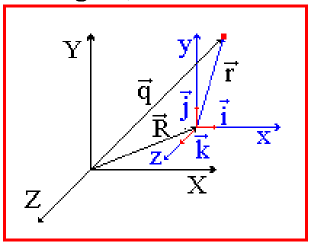
$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right]_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right]_{XYZ} = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right]_{XYZ} = 0$$

Propiedad que luego será de utilidad en el tratamiento del siguiente tema, y que como lo veremos posteriormente, dejará de tener validez al considerar sistemas de referencia animados de movimientos relativos mas generales.

Vectores Velocidad y Aceleración.

Trataremos a continuación de obtener expresiones que nos relacionen los vectores velocidad y aceleración de una partícula determinados respecto de sistemas de referencia con traslación

relativa, como se sugiere en la figura siguiente. Con este propósito tengamos en cuenta que los vectores posición de la partícula respecto de los orígenes de cada uno de los sistemas de referencia en consideración están relacionados, como puede verse en la figura, mediante:



$$\vec{q} = \vec{R} + \vec{r}$$

Derivando temporalmente en ambos miembros, desde el sistema principal, resulta:

$$\dot{\vec{q}}\Big]_{XYZ} = \dot{\vec{R}}\Big]_{XYZ} + \dot{\vec{r}}\Big]_{XYZ}$$

Donde sin lugar a dudas, la derivada temporal en el miembro de la izquierda no es otra cosa que el vector velocidad de la partícula respecto del sistema principal y la primer derivada en el miembro de la derecha es claramente el vector velocidad del origen del sistema de referencia auxiliar respecto del sistema de referencia principal, esto es, el vector que caracteriza el estado de movimiento del sistema auxiliar respecto del principal, con lo que de la anterior resulta:

$$\vec{v}_{XYZ} = \vec{V}_{XYZ} + \dot{\vec{r}}\Big]_{XYZ}$$

Restando por identificar la derivada temporal del vector posición de la partícula respecto del origen del sistema auxiliar, que notemos está calculada desde el sistema principal, y por lo tanto no podemos afirmar a priori que sea coincidente con el vector velocidad de la partícula respecto del mencionado sistema auxiliar.
Con el propósito de evaluar esta última derivada temporal expresaremos al vector posición en componentes cartesianas según las direcciones del sistema auxiliar, esto es:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Derivando temporalmente la anterior, desde el sistema principal, obtenemos:

$$\dot{\vec{r}}(t)\Big]_{XYZ} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} + x(t)\dot{\vec{i}} + y(t)\dot{\vec{j}} + z(t)\dot{\vec{k}}$$

Teniendo en cuenta que como lo demostráramos inicialmente, para la situación en consideración, la derivada temporal de los vectores unitarios es nula, de la anterior resulta:

$$\dot{\vec{r}}(t)\Big]_{XYZ} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}$$

Coincidente con el vector velocidad de la partícula respecto del sistema de referencia auxiliar. Con lo que finalmente estamos en condiciones de expresar la forma en que están vinculados los vectores velocidad de una partícula respecto de sistemas de referencia con traslación relativa y que se indica a continuación.

$$\vec{v}_{XYZ} = \vec{V}_{XYZ} + \vec{v}_{xyz} \qquad 3.01$$

Derivando temporalmente la anterior, desde el sistema de referencia principal, obtenemos:

$$\dot{\vec{v}}_{XYZ}\Big]_{XYZ} = \dot{\vec{V}}_{XYZ}\Big]_{XYZ} + \dot{\vec{v}}_{xyz}\Big]_{XYZ}$$

De donde resulta.

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{A}_{XYZ} + \dot{\vec{v}}_{xyz}\Big]_{XYZ}$$

Evaluando al vector velocidad de la partícula respecto del sistema auxiliar, en componentes cartesianas según las direcciones del mencionado sistema y teniendo en cuenta nuevamente que, para la situación en consideración, la derivada temporal de los vectores unitarios es nula, de la anterior obtenemos:

$$\dot{\vec{v}}_{xyz}\Big]_{XYZ} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}$$

Por lo tanto los vectores aceleración de una partícula, determinados respecto de sistemas de referencia con traslación relativa, están relacionados entre ellos mediante:

$$\vec{a}_{XYZ} = \vec{A}_{XYZ} + \vec{a}_{xyz} \qquad 3.02$$

Donde el término en el miembro de la izquierda corresponde al vector aceleración de la partícula respecto del sistema de referencia principal, el primer término en el miembro de la derecha, es como ya lo mencionáramos, el vector aceleración del origen del sistema auxiliar respecto del principal y el segundo término corresponde a la aceleración de la partícula respecto del sistema de referencia auxiliar.

3.02 SISTEMAS DE REFERENCIA INERCIALES Y NO INERCIALES.

Diremos que un sistema de referencia (XYZ) es un Sistema de Referencia Inercial, cuando experimentalmente se verifica que el vector aceleración una partícula o del centro de masa de un cuerpo, determinado respecto de dicho sistema, está relacionado con la resultante de las fuerzas de interacción a que se encuentra sometido mediante la ecuación:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_{XYZ}$$

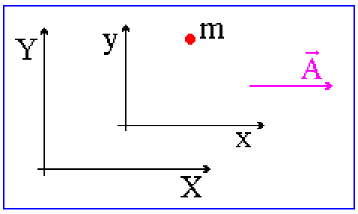
En cambio, si experimentalmente se verifica, que dichas magnitudes no se encuentran relacionadas mediante una ecuación con la forma indicada, diremos que estamos en presencia de un Sistema de Referencia No Inercial, en cuyo caso y tal como lo veremos a continuación la ecuación que relaciona las magnitudes involucradas en la anterior, tomará una forma diferente.

Antes de continuar con el tratamiento del tema, resulta oportuno remarcar que de acuerdo a lo mencionado, la única manera de averiguar si un sistema de referencia es o no inercial, será realizando experiencias que demuestren o no que la resultante de las fuerzas de interacción y la aceleración de la partícula respecto de dicho sistema están relacionadas mediante una ecuación como la indicada anteriormente.

Teniendo en cuenta lo anterior y puesto que, en general los resultados experimentales estarán acompañados de un margen de error, es claro que de verificarse experimentalmente la validez de lo indicado, en un determinado sistema de referencia, sólo estaremos en condiciones de afirmar que dentro del margen de error con el que hemos trabajado, dicho sistema puede ser considerado inercial. Así para la mayoría de las aplicaciones que se tratan en un curso de mecánica básica, un sistema de referencia fijo a tierra puede ser considerado inercial, situación que deberemos revisar ante el tratamiento de aplicaciones más delicadas que serán consideradas posteriormente a lo largo del segundo volumen.

Ecuación de movimiento para un observador no inercial.

Con el propósito de obtener una expresión para la ecuación de movimiento, o sea aquella que nos relaciona a la resultante de las fuerzas de interacción con el vector aceleración de una partícula determinado respecto de un sistema de referencia no inercial, supongamos que en el sistema (XYZ) hemos verificado experimentalmente que puede ser considerado un sistema de referencia inercial y pensemos en un nuevo sistema de referencia (xyz) que se traslada respecto del inercial con una aceleración constante, como se sugiere en la figura lateral.



Teniendo en cuenta que hemos supuesto a (XYZ) inercial, el vector aceleración de una partícula determinado respecto de dicho sistema, estará relacionado con la resultante de las fuerzas de interacción a que se encuentra sometida, mediante:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_{XYZ}$$

Teniendo presente la relación que vincula las aceleraciones determinadas respecto de sistemas de referencia con traslación relativa, entonces la aceleración del centro de masa del cuerpo, determinada respecto del sistema (xyz) no inercial, estará vinculada con la resultante de las fuerzas de interacción, mediante:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_{xyz} + m\vec{A}_{XYZ} \qquad 3.03$$

Que obviamente no coincide con la forma requerida para que el sistema pueda ser considerado inercial, en particular podemos observar que en el sistema de referencia auxiliar,

las aceleraciones observadas en una partícula o en el centro de masa de un cuerpo ya NO serán necesariamente consecuencia de una resultante de fuerzas de interacción no nula, con lo que al sistema de referencia (xyz) deberemos identificarlo como un sistema de referencia no inercial, en el que la ecuación de movimiento para una partícula o para el centro de masa de un cuerpo tendrá la forma indicada recientemente.
Teniendo en cuenta las conclusiones logradas resulta entonces que, todos los sistemas que se trasladen con velocidad constante respecto de un sistema inercial, serán también inerciales y por lo tanto en ellos será válida la ecuación de movimiento en la forma original.

Fuerza Inercial.
Mediante una simple operación algebraica es inmediato que la ecuación de movimiento, válida en un sistema de referencia no inercial, puede expresarse como:

$$\vec{F} + \left(-\, m\vec{A}_{XYZ}\right) = m\,\vec{a}_{xyz}$$

Donde, si bien el término entre paréntesis tiene unidades de fuerza, es destacable que no es una fuerza, en cuanto a que no resulta de ninguna interacción. Sin embargo y teniendo en cuenta la anterior, es claro que a la aceleración del centro de masa de un cuerpo, determinada respecto del sistema de referencia no inercial (xyz), podremos pensarla como consecuencia de la presencia de un conjunto de interacciones, con una resultante de fuerzas no nula y además del término entre paréntesis al que hacemos referencia inicialmente.
Lo mencionado nos indica que al trabajar en un sistema de referencia no inercial, los cambios observados en el estado de movimiento de un cuerpo, caracterizados por su vector aceleración, sucederán como si dicho cuerpo estuviera sometido entre otras, a una “fuerza” dada por:

$$\vec{f} = -\,m\vec{A}_{XYZ} \qquad 3.04$$

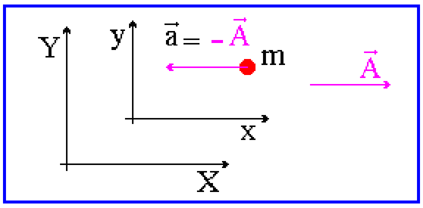
Que en adelante identificaremos como Fuerza Inercial, en términos de la cual la ecuación de movimiento, para un observador no inercial puede expresarse como:

$$\vec{F} + \vec{f} = m\,\vec{a}_{xyz} \qquad 3.05$$

Cuya forma es "semejante" a la requerida para definir a un sistema como inercial. Sin embargo resulta muy importante tener presente que el término identificado como fuerza inercial, si bien tiene las unidades de una fuerza y los efectos dinámicos en el sistema no inercial son análogos a los que observaríamos en un sistema inercial como consecuencia de una interacción, este término no es una fuerza, NO caracteriza NI está asociado con ningún mecanismo de interacción, NO satisface el principio de acción y reacción, y por lo tanto no se lo debe confundir con lo que entendemos por una fuerza de interacción.
Finalmente resulta interesante observar que si consideramos un cuerpo libre de interacciones, cuyo movimiento se pretende describir respecto de un sistema de referencia no inercial, que como se indica en la figura, se traslada respecto de un sistema de referencia inercial sometido a una aceleración caracterizada por el vector (A), entonces, teniendo en cuenta las conclusiones anteriores, es claro que la aceleración del centro de masa del cuerpo respecto del sistema de referencia no inercial vendrá dada por:

$$\vec{a}_{xyz} = -\,\vec{A}_{XYZ}$$

Que como podemos observar es independiente de la masa del cuerpo considerado y por lo tanto, todos los cuerpos, libres de interacciones, (independiente de cual sea su masa) se verán sometidos a la misma aceleración respecto de un sistema de referencia no inercial.



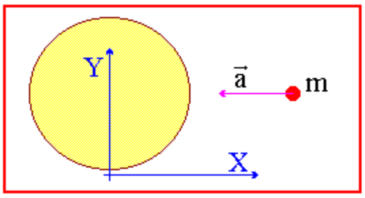
3.03 PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA.

Teniendo en cuenta lo considerado anteriormente, cuando un cuerpo de masa (m) interactúa gravitatoriamente con un planeta de masa (M), como el sugerido en la figura siguiente, en el que experimentalmente hemos verificado la validez de la ecuación de

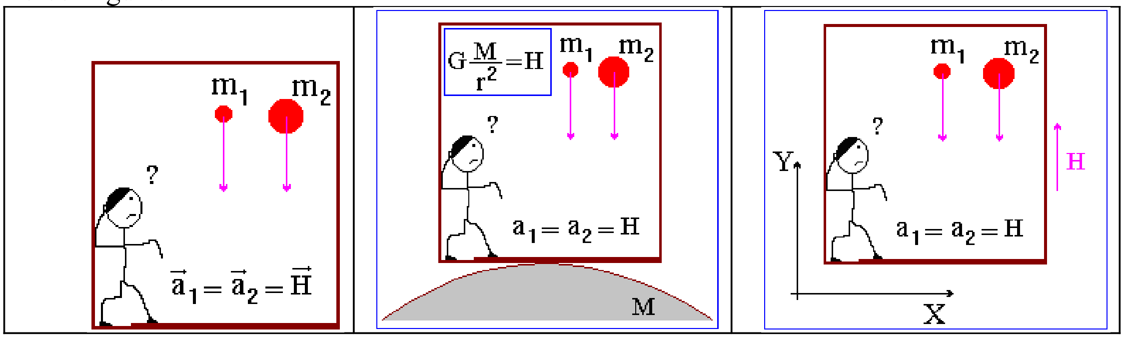
Newton en su forma original y que por lo tanto podemos considerarlo como un sistema de referencia inercial, la aceleración del centro de masa del cuerpo respecto de un sistema de referencia fijo al planeta resultó independiente de la masa del cuerpo y venía dada por:

$$a = G\frac{M}{r^2}$$

Consideremos ahora un observador en el interior de un recinto, como el sugerido en la primera de las figuras siguientes, quién experimentalmente verifica que al dejar en libertad cuerpos de diferentes masas, se mueven sometidos a la misma aceleración.



Teniendo en cuenta las conclusiones anteriores es claro que el observador se preguntará si el fenómeno es consecuencia de la interacción gravitatoria con un planeta, como se sugiere en la segunda figura o es consecuencia de que los cuerpos están libres de interacción y su recinto se acelera respecto de un sistema de referencia (XYZ) inercial, como se sugiere en la tercer figura.



Lamentablemente, la naturaleza está hecha de manera que nuestro observador no podrá encontrar un mecanismo que le permita contestar su pregunta sin abandonar su recinto, lo que podemos enunciar como que:

Es imposible diferenciar entre los efectos dinámicos asociados con una interacción gravitatoria, de los que resultan como consecuencia de las fuerzas inerciales que existen en un sistema no inercial.

Enunciado que en adelante reconoceremos como Principio de Equivalencia.

Masa Inercial y Masa Gravitatoria

Por estar fuertemente relacionado con el tema considerado, resulta oportuno destacar que la conclusión obtenida anteriormente es consecuencia de haber simplificado la masa del cuerpo al igualar la ecuación de Newton con la expresión formal de la ley de gravitación, situación que merece una aclaración adicional ya que en la ecuación de Newton la masa involucrada caracteriza la inercia del cuerpo, o sea la capacidad que posee para mantener su estado de movimiento y que hemos identificado como masa inercial, mientras que en la ley de gravitación, las masas involucradas, que en adelante identificaremos como masas gravitatorias, caracterizan una propiedad diferente, relacionada con la “capacidad” que tienen los cuerpos de interactuar gravitatoriamente y por lo tanto no es válida la simplificación de ambas masas, ya que como lo acabamos de mencionar, caracterizan propiedades diferentes, que poseen los cuerpos involucrados.

Sin embargo, teniendo en cuenta que la **Ley de Caída de los Cuerpos**, enunciada por Galileo prevé que “en un campo gravitatorio, todos los cuerpos, independientemente del valor que tenga su masa, caerán con la misma velocidad”, debemos aceptar como válida la simplificación realizada para compatibilizar ambas situaciones, siendo este un controvertido asunto que Einsten lo interpreta de una manera diferente al formalizar su Teoría General de la Relatividad, tal como lo podrá apreciar en los videos **Equivalencia e IntroRelaGral** que se recomiendan ejecutar.

Fluidos en Equilibrio.

Como una aplicación del principio de equivalencia consideraremos el caso de un fluido en equilibrio respecto de un sistema no inercial en traslación respecto de un sistema inercial, para lo cual recordemos que si un fluido está en equilibrio respecto de un sistema inercial el principio de Pascal prevé que la presión en su interior variará según:

$$p(z) = p_\circ + \rho\ g\,(z_\circ - z)$$

Con lo que las líneas de igual presión serán horizontales y puesto que el empuje por unidad de volumen al que se vería sometido un cuerpo en su interior viene dado por:

$$\vec{e} = -\nabla\ p(xyz)$$

Resulta entonces que el empuje por unidad de volumen al que se vería sometido un cuerpo en el interior del fluido vendrá dado por:

$$\vec{e} = \rho\ g\,\vec{k}$$

Con lo que el empuje al que se vería sometido resulta:

$$\vec{E} = \rho\ V_c\ g\,\vec{k}$$

Y la aceleración de su centro de masa será tal que:

$$\vec{E} + m_c\vec{g} = m_c\vec{a}$$

De donde obtenemos que dicha magnitud vendrá dada por:

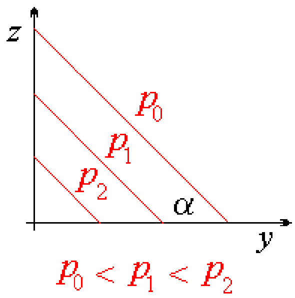
$$\vec{a} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right) g\,\vec{k}$$

Cuyo sentido dependerá de la relación entre la densidad del fluido y la del cuerpo.
Considerando ahora un fluido en equilibrio respecto de un sistema **no** inercial que se traslada respecto del anterior con una aceleración (A) constante en la dirección del eje **y**, y teniendo en cuenta las conclusiones obtenidas juntamente con el principio de equivalencia, es claro que en esta situación, la presión en el interior del fluido dependerá de las coordenadas (y,z) como se indica a continuación.

$$p(xz) = p_\circ + \rho\,A(y_\circ - y) + \rho\,g(z_\circ - z)$$

Con lo que las superficies de igual presión ya no serán horizontales y sus proyecciones sobre el plano (z,y) darán lugar a líneas como las indicada en la figura siguiente, tales que:

$$z(y) = -\frac{A}{g}\,y + b(p)$$



Cuyas ordenadas al origen vendrán dadas por:

$$b(p) = z_\circ + \frac{A}{g}\,y_\circ + \frac{p_\circ - p}{\rho\,g}$$

Y sus pendientes, por:

$$tg(\alpha) = -\frac{A}{g}$$

Teniendo en cuenta estas conclusiones, el empuje por unidad de volumen al que se vería un cuerpo sumergido en el fluido, vendrá dado por:

$$\vec{e} = \rho\,A\,\vec{j} + \rho\,g\,\vec{k}$$

Con lo que, el empuje sobre el cuerpo sumergido vendrá dado por:

$$\vec{E} = \rho\,V_c A\,\vec{j} + \rho\,V_c g\,\vec{k}$$

Resultando que para la situación en consideración, el empuje a que se verá sometido el cuerpo tendrá una componente horizontal, en la dirección y sentido en que se acelera el sistema, que indudablemente podemos asociar con la presencia de la fuerza no inercial

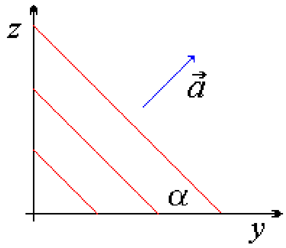
existente en el sistema respecto del cual el fluido está en equilibrio, que identificaremos como **empuje inercial,** como era de esperar si tenemos en cuenta que de acuerdo con el principio de equivalencia, los efectos dinámicos de un campo de fuerza inercial serán similares a los asociados con un campo de fuerza gravitatorio, con lo que la aceleración del centro de masa del cuerpo respecto del sistema no inercial será tal que:

$$\vec{E} + m_c\vec{g} = m_c\vec{a} + m_c\vec{A}$$

De donde, teniendo en cuenta la expresión obtenida para el empuje y dividiendo ambos miembros de la anterior por el volumen del cuerpo sumergido, resulta que la aceleración del cuerpo respecto del sistema de referencia no inercial vendrá dada por:

$$\vec{a} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right) A\,\vec{j} + \left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right) g\,\vec{k}$$

De la que obtenemos las situaciones particulares que se indican a continuación según sea la relación entre las densidades del fluido y del cuerpo en consideración:



Si la densidad del cuerpo es **menor** que la del fluido:

$$\vec{a} = \left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right) A\,\vec{j} + \left(\frac{\rho}{\rho_c} - 1\right) g\,\vec{k}$$

El vector aceleración del centro de masa del cuerpo tendrá componentes en el sentido de ambos vectores unitarios o sea verticalmente hacia arriba y horizontalmente en el sentido en que se acelera el sistema, de manera que la dirección de dicha magnitud tendrá una pendiente dada por:

$$tg(\beta) = \frac{g}{A}$$

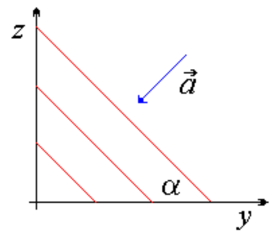
Por lo tanto, el cuerpo se acelera en una dirección perpendicular a las superficies de igual presión, como se sugiere en la figura anterior.

Suponiendo ahora que la densidad del cuerpo es **igual** que la del fluido:

$$\vec{a} = 0$$

El cuerpo permanece en equilibrio respecto del sistema no inercial

Finalmente, suponiendo que la densidad del cuerpo es **mayor** que la del fluido:



$$\vec{a} = -\left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right) A\,\vec{j} - \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right) g\,\vec{k}$$

Las componentes del vector aceleración del centro de masa del cuerpo tendrán ambas sentido opuesto al de los vectores unitarios o sea el mismo sentido que el de la fuerza gravitatoria y el de la fuerza inercial, como se muestra en la figura lateral, de manera que nuevamente, la dirección de dicha magnitud tendrá una pendiente dada por:

$$tg(\beta) = \frac{g}{A}$$

Por lo tanto, la dirección del vector aceleración será nuevamente perpendicular a las superficies de igual presión, pero con sentido opuesto al primer caso considerado.