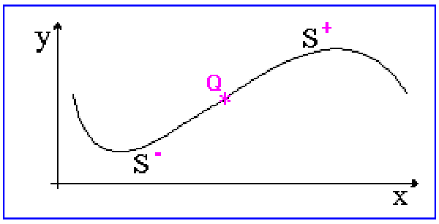
1.10 COMPONENTES INTRÍNSECAS.

Función Posición.

Consideraremos a continuación el caso el caso de una partícula que como consecuencia de los vínculos a que pudiera estar sometida, está restringida a desplazarse a lo largo de una trayectoria plana predeterminada, como por ejemplo la sugerida en la figura siguiente donde hemos supuesto que los ejes del sistema de referencia respecto del que se describe el movimiento se han orientado de manera que el plano (xy) coincida con el plano del movimiento.

Entendiendo por grados de libertad de un sistema al número de coordenadas linealmente independientes necesarias para describir su comportamiento y bajo las condiciones recientemente indicadas, es claro que la partícula deberá ser considerada como un sistema con un único grado de libertad puesto que las variables involucradas, o sea, las coordenadas (x) e (y), no son linealmente independientes como consecuencia de existir entre ellas una relación funcional predeterminada, supuestamente conocida.



$$y = f(x)$$

Con lo que, el conocimiento de la dependencia temporal de cualquiera de ellas permitirá obtener información sobre la dependencia temporal de la restante.

Para una situación como la indicada, a menudo las coordenadas cartesianas no son las más convenientes para formular una descripción del movimiento de la partícula. En estos casos suele resultar muy conveniente describir el movimiento en términos de la posición de la partícula medida a lo largo de la trayectoria, respecto de algún punto arbitrario de la misma, indicado con (Q) en la figura anterior.

En lo que continúa y a menos que digamos lo contrario, designáremos como coordenada de posición a la variable indicada en el párrafo anterior, que identificaremos con (s), empleando la letra Q para referirnos al punto de la trayectoria respecto del cual se determinan los valores de la mencionada coordenada, siendo totalmente arbitraria la selección del sentido en que crece dicha magnitud.

Una vez seleccionado el punto respecto del que determinaremos la coordenada de posición y el sentido en el que se la considerará creciente, como se sugiere en la figura anterior, es claro que dicha coordenada será en general, una función del tiempo directamente relacionada con la "forma" en que la partícula recorra la trayectoria, a la que en adelante reconoceremos como función posición.

$$s = s(t)$$

En este momento resulta adecuado destacar que como la posición de la partícula deberá estar definida en cada instante (al menos en lo que a este formalismo se refiere), la función posición deberá ser continua y estar unívocamente definida en cada instante (valga la redundancia incluida en este párrafo).

Vector Velocidad.

Puesto que estamos suponiendo conocida de antemano la trayectoria a lo largo de la que se desplazará la partícula, carece de interés pensar en una expresión formal para el vector posición de la misma, por lo tanto en lo que continúa dedicaremos nuestro esfuerzo a la búsqueda de expresiones formales para los vectores velocidad y aceleración de la partícula, en términos de la función posición y sus derivadas temporales, que serán de utilidad para el tratamiento de problemas vinculados con el movimiento de una partícula a lo largo de trayectorias predeterminadas.

Con el propósito de obtener una expresión para el vector velocidad de la partícula tengamos en cuenta que de acuerdo a (1.1) dicho vector se definió como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Que en términos de la coordenada de posición puede se lo puede expresar:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

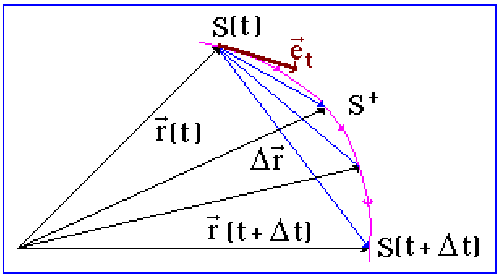
Que también podemos expresar como:

$$\vec{v} = \dot{s}\,\frac{d\vec{r}}{ds}$$

Resultando interesante destacar que la derivada temporal de la función posición tiene en cuenta, de que manera, la partícula recorre la trayectoria. En cambio la restante, esto es, la derivada del vector posición respecto de la coordenada de posición, está relacionada con la geometría del problema, o sea con las características de la trayectoria. No contiene ninguna información sobre la "forma" en que la partícula recorre dicha trayectoria, que como lo mencionáramos, está contenida en la derivada temporal de la función posición.
Para evaluar la derivada del vector posición respecto de la coordenada de posición, tengamos en cuenta que.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$$

Definiendo el vector tangente unitario ($\mathbf{e}_t$) como un vector tangente a la trayectoria en cada punto, cuyo sentido coincide con el sentido en que crece la coordenada de posición (arbitrariamente seleccionado por nosotros) y suponiendo que la partícula recorre dicha trayectoria en el sentido mencionado, como se sugiere en la figura lateral, el camino recorrido por la partícula en el intervalo de tiempo considerado resulta:

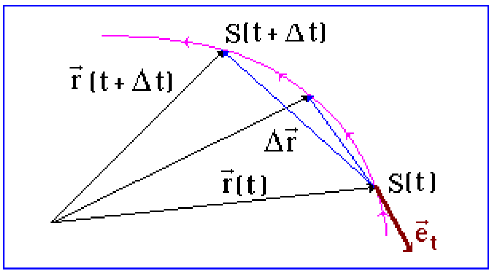


$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

Claramente positivo, y puesto que en el límite su valor coincidirá con el módulo del vector desplazamiento, sin lugar a dudas podemos afirmar que bajo estas condiciones:

$$\lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} = \vec{e}_t \qquad \text{Con lo que} \qquad \frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{e}_t$$

Análogamente, considerando la otra situación posible, que la partícula recorra la trayectoria en el sentido en que decrece la coordenada de posición, como se sugiere en la figura lateral, nuevamente, el camino recorrido por la partícula en el intervalo de tiempo considerado vendrá dado por:



$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

Que en esta oportunidad será negativo, y por lo tanto podemos afirmar que también bajo estas condiciones, la derivada del vector posición respecto de la posición medida a lo largo de la trayectoria, nos dara el vector tangente unitario definido anteriormente, con lo que, independientemente del sentido en que la partícula recorra la trayectoria, la derivada temporal en consideración siempre será coincidente con el vector tangente unitario definido anteriormente, con lo que el vector velocidad quedará expresado como:

$$\vec{v}(t) = \dot{s}(t)\,\vec{e}_t \qquad 1.10$$

Recordando que el vector tangente unitario indica el sentido en que crece la coordenada de posición (independientemente del sentido en que la partícula recorra la trayectoria) de la expresión anterior resulta que valores negativos de la derivada temporal de la función posición estarán asociados con un movimiento en el sentido decreciente de dicha coordenada, en cambio valores positivos de la mencionada derivada estarán asociados con un movimiento en el sentido creciente de esta coordenada, siendo interesante destacar que en todos los casos, el módulo del vector velocidad de la partícula vendrá expresado por:

$$v(t) = |\dot{s}(t)|$$

Vector aceleración.

Puesto que al vector aceleración de una partícula lo hemos definido como la derivada temporal de su vector velocidad, o sea:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Teniendo en cuenta esto y la expresión (1.10) obtenida para el vector velocidad, resulta:

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\,\vec{e}_t + \dot{s}(t)\,\dot{\vec{e}}_t \qquad 1.11$$

Donde la derivada temporal del vector tangente unitario ha sido considerada, ya que en general esta derivada no será nula (a menos que la trayectoria sea una recta) como consecuencia de los cambios observados, desde el sistema de referencia involucrado, en la dirección del mencionado vector.

Con el propósito de evaluar dicha derivada temporal tengamos en cuenta que:

$$\dot{\vec{e}}_t = \frac{d\vec{e}_t}{dt}$$

Que podemos expresar como:

$$\dot{\vec{e}}_t = \frac{d\vec{e}_t}{ds}\frac{ds}{dt}$$

O bien, como:

$$\dot{\vec{e}}_t = \dot{s}(t)\frac{d\vec{e}_t}{ds}$$

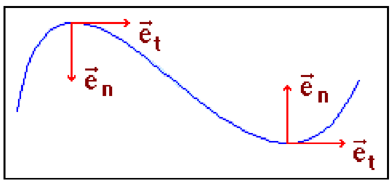
Siendo interesante destacar que así indicada, la derivada temporal en consideración, resulta claramente dependiente de la “forma” en que la partícula recorre la trayectoria, más precisamente de su velocidad (a través de la derivada temporal de la función posición) y de la geometría del problema, esto es de las características de la trayectoria (a través de la derivada del vector tangente unitario, respecto de la coordenada de posición), con lo que (1.11) nos queda expresada como:

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\,\vec{e}_t + \dot{s}^2(t)\,\frac{d\vec{e}_t}{ds}$$

Donde la derivada del vector tangente unitario, respecto de la coordenada de posición, puede demostrarse viene dada por:

$$\frac{d\vec{e}_t}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\vec{e}_n$$

Siendo (ρ) el radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado y ($\mathbf{e}_n$) un vector unitario, normal a la trayectoria en dicho punto y dirigido hacia el centro de curvatura, como se sugiere en la figura lateral.



Con lo que en general, al vector aceleración de la partícula podremos expresarlo como:

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}(t)\,\vec{e}_t + \frac{\dot{s}^2(t)}{\rho}\,\vec{e}_n \qquad 1.12$$

Esto es, como la suma de una componente tangente a la trayectoria, directamente relacionado con los cambios temporales en el módulo del vector velocidad, que en adelante identificaremos como:

$$\vec{a}_t(t) = \ddot{s}(t)\,\vec{e}_t$$

Mas una componente normal relacionada con el módulo del vector velocidad, (más estrictamente con el cuadrado del mismo) y con el radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado, esto último directamente vinculado con la geometría del problema y por lo tanto con los cambios temporales observados en la dirección del vector velocidad de la partícula, que en adelante expresaremos como:

$$\vec{a}_n(t) = \frac{\dot{s}^2(t)}{\rho}\,\vec{e}_n$$

Finalmente, teniendo en cuenta las conclusiones obtenidas para los vectores velocidad y aceleración de una partícula, resulta que, cuando las derivadas primera y segunda de la función posición tengan el mismo signo (o sea, cuando el sentido de la componente tangencial del vector aceleración coincide con el sentido del movimiento) entonces debemos esperar incrementos en la velocidad de la partícula. En cambio si los signos mencionados fueran opuestos, esto se traducirá en una disminución en el módulo de la velocidad de la partícula en consideración.

Componentes Intrínsecas de la Ecuación de Newton.

Teniendo en cuenta las conclusiones anteriores y la ecuación de Newton, las componentes intrínsecas del vector aceleración estarán relacionadas con la resultante de las fuerzas de interacción, mediante:

$$\vec{F} = m\ddot{s}\,\vec{e}_t + m\frac{\dot{s}^2}{\rho}\,\vec{e}_n$$

Que luego de expresar a dicha resultante en componentes según las direcciones de los vectores tangente y normal a la trayectoria, dará lugar al sistema de ecuaciones escalares:

$$F_t = m\,\ddot{s}$$

$$F_n = m\frac{\dot{s}^2}{\rho}$$

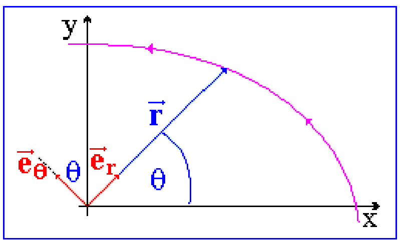
Cuya solución nos permitirá contar con una adecuada descripción del movimiento de la partícula o del centro de masa de un cuerpo.

1.11 COMPONENTES POLARES DE LOS VECTORES VELOCIDAD Y ACELERACIÓN.

Como lo mencionamos anteriormente, el manejo de componentes cartesianas resulta particularmente útil en el tratamiento de aquellas situaciones donde la dirección de la resultante de las fuerzas de interacción a las que está sometido un cuerpo y por lo tanto su vector aceleración permanece constante.

Como lo veremos a lo largo de las aplicaciones, existe una variedad de problemas en los que resultará muy conveniente expresar a los vectores velocidad y aceleración en componentes según una dirección coincidente con la del vector posición y una dirección ortogonal a ésta, relacionada con una coordenada angular.

Con el propósito de desarrollar la herramienta mencionada y como se sugiere en la figura lateral, la posición de una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria plana quedará bien identificada si en cada instante damos los valores de las coordenadas, radial y angular, que se indican a continuación y que se muestran en la mencionada figura.



$$r = r(t) \qquad y \qquad \theta = \theta(t)$$

Coordenadas que en general serán funciones del tiempo, en término de las cuales trataremos de obtener expresiones para los vectores posición, velocidad y aceleración de una partícula, en componentes según las direcciones caracterizadas por los vectores unitarios, radial y transversal, asociados con el sentido de crecimiento de dichas coordenadas, que se muestran en la figura anterior.
Teniendo en cuenta como han sido definidas, en función de estas nuevas coordenadas es inmediato que el vector posición de una partícula nos queda expresado como:

$$\vec{r}(t) = r(t)\,\vec{e}_r$$

Recordando que el vector velocidad de una partícula se define como la derivada temporal de su vector posición, es inmediato entonces que una expresión para dicha magnitud en función de las coordenadas en consideración resultará de derivar la obtenida recientemente para el mencionado vector posición, con lo que:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r + r(t)\,\dot{\vec{e}}_r$$

Donde hemos incluido la derivada temporal del vector radial unitario ya que atendiendo como lo hemos definido no podemos esperar que en general, dicha derivada, calculada desde el sistema de referencia en consideración, sea nula, como consecuencia de los cambios temporales que cabe esperar en la dirección del mencionado vector unitario, salvo en aquellas situaciones muy particulares en las que la partícula se desplace a lo largo de una trayectoria recta según la dirección radial.
Con el propósito de evaluar dicha derivada temporal, expresaremos al mencionado vector unitario en componentes según las direcciones de los vectores unitarios cartesianos:

$$\vec{e}_r = \cos\theta\;\vec{i} + \operatorname{sen}\theta\;\vec{j}$$

Teniendo en cuenta que los vectores unitarios cartesianos caracterizan direcciones fijas al sistema de referencia involucrado, de la anterior obtenemos:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\left(-\operatorname{sen}\theta\;\vec{i} + \cos\theta\;\vec{j}\right)$$

Como lo podemos apreciar en la figura anterior, el término entre paréntesis no es otra cosa que el vector unitario en la dirección transversal, por lo tanto:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\;\vec{e}_\theta$$

Con lo que, vector velocidad de la partícula nos queda expresado como:

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta \qquad 1.13$$

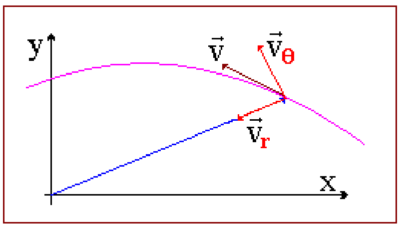
O sea como, la suma de una componente en la dirección radial dada por:

$$\vec{v}_r(t) = \dot{r}(t)\,\vec{e}_r$$

Mas una componente en la dirección transversal:

$$\vec{v}_\theta(t) = r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\vec{e}_\theta$$

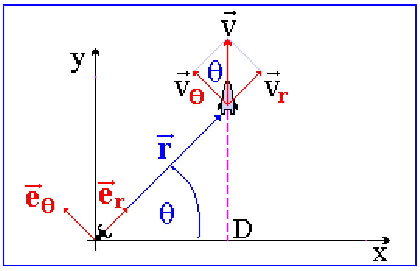
Que cualitativamente se muestran en la figura lateral.



Resulta interesante destacar que la componente radial del vector velocidad, nos proporciona información sobre la rapidez con que la partícula se acerca o aleja al punto desde donde se determina su vector posición, que en adelante identificaremos como polo o centro de nuestro sistema de coordenadas y que en lo que va del tema hemos supuesto coincidente con el origen de nuestro sistema de referencia.
En cambio la componente transversal nos proporciona información relacionada con la rapidez con que el vector posición barre ángulos, a través de la derivada temporal de la coordenada angular, determinada a partir de una dirección fija al mencionado sistema de referencia, que en adelante identificaremos como eje polar y que hasta el momento hemos supuesto coincidente con uno de los ejes de dicho sistema, condición ésta que no necesariamente debe respetarse, pero que indudablemente resulta conveniente.

Ejemplo.

Consideremos un proyectil que asciende con velocidad constante mientras es seguido por una estación de radar en el origen de nuestro sistema de referencia, como se sugiere en la figura lateral y seleccionando como polo al punto de emplazamiento del radar, la componente radial del vector velocidad del proyectil, indicada en la figura puede expresarse como:



$$v_r = v \operatorname{sen} \theta$$

Por lo tanto, la derivada temporal de la coordenada radial vendrá dada por:

$$\dot{r} = v \operatorname{sen} \theta$$

Que en término de la coordenada vertical puede expresarse como:

$$\dot{r} = v \frac{y(t)}{r(t)}$$

Teniendo en cuenta que hemos supuesto constante la velocidad del proyectil, con lo que su coordenada vertical variará linealmente con el tiempo, de la anterior resulta que la componente radial en función del tiempo vendrá dada por:

$$\dot{r} = \frac{v^2 t}{\sqrt{D^2 + v^2 t^2}} \qquad \text{Por lo tanto, cuando:} \quad t \to \infty \qquad \dot{r} \to v$$

Lo que era de esperar, ya que en estas condiciones el proyectil se encontrará infinitamente lejos del radar, y por lo tanto la componente radial deberá coincidir con el vector velocidad del proyectil.

Análogamente, de la figura obtenemos que la componente transversal del vector velocidad puede expresarse en términos de la coordenada angular, como:

$$v_\theta = v \cos \theta$$

Por lo tanto:

$$r \dot{\theta} = v \cos \theta$$

Con lo que, las variaciones temporales de la coordenada angular, que en adelante identificaremos como velocidad angular, nos queda expresada como:

$$\dot{\theta} = v \frac{D}{r^2}$$

Con lo que dicha magnitud en función del tiempo vendrá dada por:

$$\dot{\theta} = v \frac{D}{D^2 + v^2 t^2}$$

Que decrece en el tiempo de manera que tiende a cero cuando éste tiende a infinito, con lo que la componente transversal del vector velocidad también tenderá a la nulidad, lo que era de esperar si tenemos en cuenta que como ya lo indicáramos, en esas condiciones la componente radial tendía a confundirse con el vector velocidad del proyectil.

Vector Velocidad Angular.

A continuación definiremos una magnitud vectorial directamente relacionada con la velocidad angular de interés en el tratamiento de temas que requieran el manejo de componentes polares. Con este propósito multiplicaremos vectorialmente las expresiones obtenidas anteriormente para el vector posición y velocidad de una partícula, con lo que:

$$\vec{r} \times \vec{v} = r^2 \dot{\theta} \left(\vec{e}_r \times \vec{e}_\theta \right)$$

Definiendo el vector unitario, normal al plano del movimiento:

$$\vec{e}_w = \vec{e}_r \times \vec{e}_\theta$$

La igualdad anterior puede expresarse como:

$$\vec{r} \times \vec{v} = r^2 \dot{\theta}\, \vec{e}_w$$

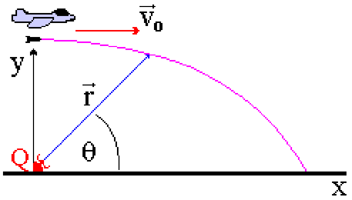
Definiendo el vector velocidad angular de la partícula, como:

$$\vec{w} = \dot{\theta}\, \vec{e}_w$$

Resulta entonces un vector normal al plano del movimiento cuyo módulo está directamente vinculado con la velocidad con que el vector posición barre ángulos en el plano del movimiento, que en general podremos expresar como:

$$\vec{w} = \frac{\vec{r} \times \vec{v}}{r^2} \qquad 1.14$$

Ejemplo.



Como una aplicación del tema tratado y del manejo de coordenadas polares, consideremos la situación que se sugiere en la figura lateral donde se muestra un proyectil que se deja caer desde un avión en el instante en que éste sobrevuela una estación de radar en tierra.

Suponiendo conocida la velocidad del avión en el instante del lanzamiento y despreciable la interacción entre el proyectil y la atmósfera, obtendremos una expresión para la velocidad angular con que deberá rotar el radar alrededor de un eje horizontal si se desea efectuar un seguimiento del proyectil a lo largo de su trayectoria.

Con el propósito de evaluar la velocidad angular del proyectil mediante (1.14) obtendremos previamente expresiones para los vectores involucrados, en componentes cartesianas. Así para el vector velocidad resulta:

$$\vec{v}(t) = v_\circ \vec{i} - g\, t\, \vec{j}$$

Con lo que para el vector posición obtenemos.

$$\vec{r}(t) = v_\circ\, t\, \vec{i} + \left(y_\circ - \tfrac{1}{2} g\, t^2\right) \vec{j}$$

Teniendo en cuenta estas conclusiones, de (1.14) resulta:

$$\vec{w}(t) = \frac{v_\circ y_\circ + \frac{1}{2} v_\circ g\, t^2}{\left(v_\circ\, t\right)^2 + \left(y_\circ - \frac{1}{2} g\, t^2\right)^2} \vec{k}$$

Que tiende a cero, cuando el tiempo tiende a infinito, puesto que el denominador depende de la cuarta potencia temporal frente a una dependencia cuadrática en el numerador.

La componente radial del vector velocidad puede obtenerse derivando temporalmente la expresión lograda para el módulo del vector posición, o bien teniendo en cuenta que, en general.

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = r\, \dot{r}$$

De donde:

$$\dot{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{r}$$

Con la que una expresión para dicha magnitud, en función del tiempo, puede lograrse teniendo en cuenta las expresiones, en componentes cartesianas, obtenidas para los vectores involucrados.

Componentes Polares del Vector Aceleración.

Teniendo en cuenta como a sido definido el vector aceleración de una partícula, y con el propósito de obtener una expresión para dicha magnitud en componentes polares, derivando temporalmente la obtenida para el vector velocidad, resulta:

$$\vec{a} = \ddot{r}\, \vec{e}_r + \dot{r}\, \dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\, \dot{\theta}\, \vec{e}_\theta + r\, \ddot{\theta}\, \vec{e}_\theta + r\, \dot{\theta}\, \dot{\vec{e}}_\theta$$

Expresando el vector transversal unitario en componentes cartesianas.

$$\vec{e}_\theta = -\operatorname{sen}\theta\ \vec{i} + \cos\theta\ \vec{j}$$

Y derivando temporalmente, obtenemos:

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\left(\cos\theta\ \vec{i} + \operatorname{sen}\theta\ \vec{j}\right)$$

Puesto que el término entre paréntesis es el vector radial unitario, expresado en componentes cartesianas, de la anterior resulta:

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta}\ \vec{e}_r$$

Teniendo en cuenta esta conclusión y la obtenida anteriormente para la derivada temporal del vector radial unitario, el vector aceleración de la partícula nos queda:

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta + \dot{r}\,\dot{\theta}\ \vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\ \vec{e}_\theta - r\,\dot{\theta}^2\ \vec{e}_r$$

Que luego de agrupar las componentes queda expresado como:

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta \qquad 1.15$$

Por lo tanto al vector aceleración de una partícula podremos pensarlo en general, como la suma de una componente radial dada por:

$$\vec{a}_r = \left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r$$

Mas una componente transversal dada por:

$$\vec{a}_\theta = \left(r\,\ddot{\theta} + 2\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

Componentes Polares de la Ecuación de Newton.

Teniendo en cuenta (1.23) es claro que para aquellas situaciones en las que resulte conveniente expresar al vector aceleración en componentes polares, como las que consideraremos a lo largo de este volumen, la ecuación de Newton en dichas componentes nos quedará expresada como:

$$\vec{F} = m\,(\,\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + m\,(\,r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,)\,\vec{e}_\theta$$

Que, luego de expresar a la resultante de las fuerzas de interacción en dichas componentes, dará lugar al sistema de ecuaciones escalares:

$$F_r = m(\,\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)$$

$$F_\theta = m(\,r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\,)$$

Cuya solución nos permitirá contar con una adecuada descripción del movimiento de la partícula o del centro de masa del sistema en consideración.