1.04 PRINCIPIOS DE LA MECÁNICA.

En el tema anterior se definieron un conjunto de magnitudes tales como los vectores posición, velocidad y aceleración con el propósito de desarrollar un formalismo que nos permita describir las características del movimiento de una partícula respecto de un sistema de referencia.

En particular el vector aceleración fue definido con el propósito de caracterizar los cambios temporales observados en el estado de movimiento de la partícula, sin tener en cuenta las causas que originan dichos cambios, tema del que nos ocuparemos en esta oportunidad al considerar el trabajo de Isaac Newton, que publicara en 1687 en su tratado "Principios Matemáticos de la Filosofía Natural".

Inercia y Ecuación de Newton.

La experiencia diaria nos muestra que para modificar el estado de movimiento de un cuerpo es necesario que medie la interacción con algún otro cuerpo o sistema. Así, para poner en movimiento detener o girar un automóvil, necesitamos de la interacción entre sus ruedas y el pavimento. De no existir dicha interacción sería obviamente imposible lograr cambios en su estado de movimiento.

Teniendo en cuenta lo mencionado en el párrafo anterior podemos concluir que los cambios en el estado de movimiento de un cuerpo son necesariamente consecuencia de la presencia de algún tipo de interacción. Enunciado de otra manera, "un cuerpo libre de interacciones conservará su estado de movimiento" y por lo tanto se desplazará con una velocidad de módulo constante a lo largo de una trayectoria recta, o si estaba en reposo, continuará en dicho estado. Conclusión ésta que es el resultado de hechos experimentales y que por lo tanto deben considerarse como el enunciado de una Ley Física, que ya estaba en la mente de Galileo Galilei, y que en adelante reconoceremos como Principio de Inercia.

Otro resultado experimental muestra que los cambios observados en el estado de movimiento de un cuerpo, caracterizados por su vector aceleración, dependen del tipo de interacción a la que esta sometido. Empujando suavemente un cuerpo logramos pequeños cambios en su estado de movimiento, si empujamos fuertemente, esto es, lo sometemos a una interacción más importante, lograremos cambios más importantes en su estado de movimiento.

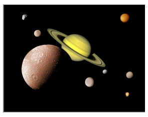
Con el propósito de caracterizar de alguna manera las Interacciones a que pudiera estar sometido un cuerpo necesitamos definir una nueva magnitud, a la que en adelante identificaremos como Fuerza de Interacción, o simplemente Fuerza, cuando esta simplificación en el lenguaje no dé lugar a dudas, que como lo veremos posteriormente, pueden surgir al considerar sistemas de referencia con movimiento relativo.

Puesto que los cambios temporales observados en el estado de movimiento de un cuerpo están caracterizados mediante una magnitud vectorial (su vector aceleración) y los mismos están directamente relacionados con las interacciones a que está sometido el cuerpo, es claro entonces que la magnitud destinada a caracterizar las interacciones deberá ser una magnitud del tipo vectorial, cuyas principales características se considerarán detalladamente a lo largo de temas posteriores, para algunas interacciones de interés particular.

Asimismo, la experiencia nos muestra que en general, diferentes cuerpos sometidos a idénticas interacciones, presentarán diferentes cambios en sus estados de movimiento. Pensemos por ejemplo en los cambios que observaríamos en el estado de movimiento de un automóvil y un camión sometidos a la misma interacción. Esto nos indica que cada cuerpo tiene una determinada capacidad para mantener su estado de movimiento, a la que en adelante identificaremos como inercia.

Los resultados experimentales muestran que la inercia de un cuerpo es una propiedad inherente del mismo, independiente de su estado de movimiento que caracterizaremos mediante una magnitud escalar a la que identificaremos como masa inercial. Siendo oportuno observar que la afirmación relacionada con la independencia del estado de movimiento deberá ser revisada cuando las partículas se muevan con velocidades comparables a la de la luz.

Con el propósito de hacer determinaciones cuantitativas de la mencionada masa inercial de un cuerpo, nos limitaremos a elegir un cuerpo como patrón o unidad de dicha magnitud y

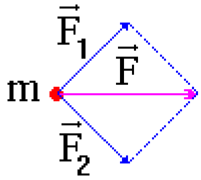


sometiendo éste y los restantes a iguales interacciones podremos, estudiando los cambios observados en el estado de movimiento de cada uno de ellos, identificar los de mayor o menor masa inercial, siendo el kilogramo masa (kg) la unidad seleccionada en el sistema MKS para caracterizar la inercia del cuerpo patrón.
Lo indicado muestra entonces, que los cambios temporales observados en el estado de movimiento de un cuerpo, caracterizados por su vector aceleración, estarán fuertemente relacionados con la inercia de dicho cuerpo, caracterizada por su masa inercial, y con la interacción a que está sometido, caracterizada por la magnitud que hemos identificado como fuerza de interacción. De manera que designando con (m) a la magnitud escalar que nos caracteriza la inercia del cuerpo y con (F) a la magnitud vectorial que nos caracteriza la interacción, los resultados experimentales muestran que, en el caso de una partícula, dichas magnitudes están relacionadas con su vector aceleración mediante la expresión:

$$\vec{F} = m\,\vec{a} \tag{1.4}$$

Donde en el caso de que la partícula estuviera sometida a más de una interacción, entonces la fuerza a considerar es la resultante de las fuerzas a que está sometida dicha partícula, definida como:

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i$$



Que gráficamente y para el caso de dos fuerzas aplicadas, podemos representar como se muestra en la figura lateral.
Teniendo en cuenta la unidad seleccionada para la masa inercial en el sistema MKS, la unidad para las fuerzas de interacción en dicho sistema es el Newton (N), que por lo tanto vendrá dada por:

$$N = kg\,\frac{m}{s^2}$$

Como una ilustración del tema considerado, se recomienda el video **Newton**.

Condiciones Iniciales.
Teniendo en cuenta como se definió el vector aceleración de una partícula, resulta que diferenciando (1.3) obtenemos:

$$d\vec{v} = \vec{a}(t)\,dt$$

Que integrando en ambos miembros entre límites compatibles, nos queda:

$$\int_{v_0}^{v_t} d\vec{v} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

De donde resulta que, los cambios observados en su vector velocidad, durante un cierto intervalo de tiempo, vendrán dados por:

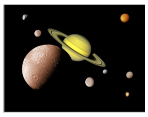
$$\vec{v}(t) - \vec{v}(t_\circ) = \int_{t_\circ}^{t} \vec{a}(t)\,dt$$

Definiendo el instante inicial como el instante a partir del cual el vector aceleración de la partícula es el considerado en la expresión anterior y con v_0 a la velocidad de la partícula en dicho instante, de la igualdad recientemente obtenida resulta que al vector velocidad de la partícula en un instante posterior al inicial podremos expresarlo como:

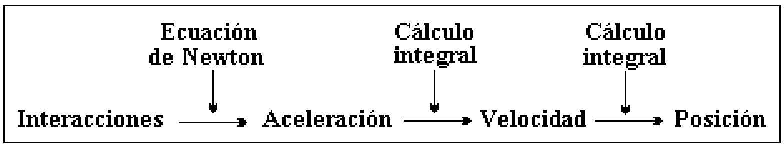
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_\circ + \int_0^t \vec{a}(t)\,dt$$

Análogamente, diferenciando y luego integrando, de (1.1) resulta que al vector posición de una partícula en un instante posterior al inicial podremos expresarlo como:

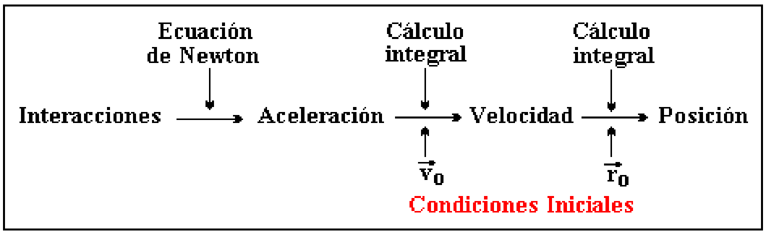
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_\circ + \int_0^t \vec{v}(t)\,dt$$



Por lo tanto, si conocemos las interacciones a las que está sometido un cuerpo, mediante la ecuación de Newton podremos obtener una expresión formal para su vector aceleración, y a partir de las anteriores, expresiones para sus vectores velocidad y posición en función del tiempo y por lo tanto una descripción del futuro comportamiento del cuerpo, como se sugiere en el diagrama siguiente.



Sin embargo lo mencionado anteriormente no es totalmente cierto, ya que, **según este formalismo**, para obtener el vector velocidad a partir del vector aceleración necesitamos conocer el vector velocidad en el instante inicial, o sea en el instante a partir del cual la partícula queda sometida a las interacciones involucradas. Análogamente para obtener una expresión del vector posición a partir del vector velocidad, necesitamos su vector posición en el instante inicial, o sea que necesitamos lo que en adelante identificaremos como **Condiciones Iniciales** del problema en consideración, tal como se sugiere en el siguiente diagrama.

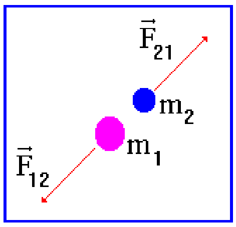


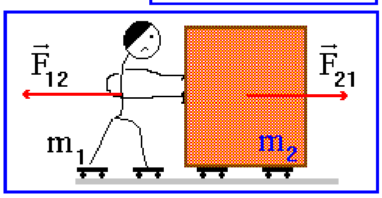
Si por algún motivo no pudiéramos especificar con precisión y simultáneamente la posición y velocidad de la partícula en el instante inicial, mediante este formalismo, sería imposible prever su comportamiento futuro, y por lo tanto es necesario tener presente el **importante papel que en este formalismo**, juegan las condiciones iniciales correspondientes al problema en consideración.

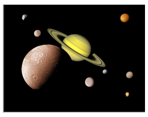
Principio de Incerteza.
Lo indicado está fuertemente vinculado con unas de las grandes limitaciones que este formalismo presenta cuando se lo pretende emplear en la descripción del comportamiento de partículas de masas muy pequeñas que integran sistemas microscópicos, como consecuencia de que en estos casos, es imposible determinar con precisión y simultáneamente la posición y velocidad de la partícula, enunciado que conocemos como principio de incerteza.
Lo mencionado llevó a la necesidad de desarrollar un formalismo compatible con dicho principio que actualmente se conoce como Mecánica Cuántica, siendo interesante destacar que dicho formalismo solamente nos permite obtener una descripción probabilística del comportamiento de un sistema, como se menciona en el video **Pared Cuántica**, que como siempre se recomienda ejecutar.

Principio de Acción y Reacción.
Otro resultado experimental de relevancia muestra que la interacción entre dos cuerpos siempre da lugar a un par de fuerzas de igual intensidad, dirección y sentido opuesto, aplicadas sobre cada uno de los cuerpos involucrados, como se sugiere en las figuras laterales y que en adelante identificaremos como par Acción y Reacción.
Donde el primer subíndice identifica al cuerpo sobre el que está aplicada la fuerza y el segundo, el cuerpo con el que interactua el anterior, así para las situaciones indicadas y teniendo en cuenta el principio de acción y reacción, las fuerzas representadas deberán se tales que:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$







Resultando conveniente remarcar que las fuerzas a las que se hace referencia anteriormente, están aplicadas sobre cuerpos diferentes, y por lo tanto bajo ningún concepto podemos esperar que se cancelen mutuamente.
Teniendo en cuenta la ecuación de Newton, resulta que para las situaciones indicadas en las figuras anteriores, el vector aceleración de cada uno de los cuerpos involucrados vendrá expresado por:

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \qquad\qquad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}$$

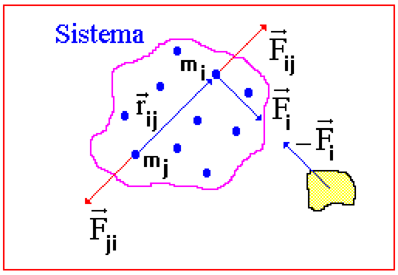
De donde, teniendo en cuenta el principio de acción y reacción, resulta:

$$\vec{a}_1 = -\frac{m_2}{m_1}\vec{a}_2$$

Suponiendo a los cuerpos de masas comparables, debemos esperar aceleraciones similares, en cambio si la masa de uno de ellos fuera muy superior a la del otro, la aceleración del cuerpo de mayor masa sería despreciable comparada con la que observaríamos en el cuerpo de menor masa, y como una interesante ilustración del tema, se recomienda el video **AyR**

1.05 SISTEMA DE CUERPOS PUNTUALES.

Consideremos a continuación un sistema formado por un conjunto de cuerpos puntuales como el sugerido en la figura siguiente, donde el subíndice nos identifica a cada una de las partículas que integran el mencionado sistema.



En este caso será necesario diferenciar dos tipos de fuerzas de interacción. Aquellas que identificaremos como fuerzas internas, que resultan de la interacción mutua entre las partículas que forman el sistema y que caracterizaremos con un subíndice doble, tal que, el primer subíndice identifica a la partícula sobre la que está aplicada la fuerza y el segundo, a la partícula con la que interactúa la anteriormente mencionada. Por otro lado reconoceremos como fuerzas externas a las que resultan de la interacción entre las partículas que forman nuestro sistema con cuerpos que no forman parte del mismo, cuya resultante actuante sobre cada partícula, indicaremos con un único subíndice.
Teniendo en cuenta lo mencionado y suponiendo un sistema de N cuerpos puntuales, la ecuación de Newton para la partícula genérica (i), vendrá dada por:

$$\sum_{j=1}^{j=N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i = m_i\,\vec{a}_i$$

Existiendo una ecuación análoga a la anterior por cada una de las (N) partículas que forman nuestro sistema, que sumadas miembro a miembro nos proporcionan la igualdad:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\left(\sum_{j=1}^{j=N} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_i\right) = \sum_{i=1}^{i=N} m_i\,\vec{a}_i$$

Que podemos expresar como:

$$\sum_{i=1}^{i=N}\sum_{j=1}^{j=N} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{i=N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{i=N} m_i\,\vec{a}_i$$

Teniendo en cuenta ahora que, en virtud del principio de acción y reacción las fuerzas internas serán tales que:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Los términos incluidos en la sumatoria doble se anularan de a pares, con lo que la misma resultará nula y por lo tanto de la igualdad anterior resulta:

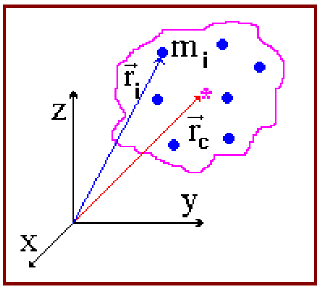
$$\sum \vec{F}_i = \sum m_i \vec{a}_i$$

Puesto que el miembro de la izquierda no es otra cosa que la Resultante de las Fuerzas Externas a que está sometido el sistema, es claro que la anterior puede ser expresada como:

$$\vec{F} = \sum m_i \vec{a}_i \qquad 1.5$$

Centro de Masa.

Considerando nuevamente un sistema de partículas como el indicado en la figura siguiente donde con ($\mathbf{r}_i$) identificamos a las coordenadas vectoriales de cada una de las (N) partículas, respecto del origen del sistema de referencia involucrado, definiremos al Centro de Masa del sistema de partículas como un punto cuya coordenada vectorial, respecto del origen del sistema de referencia en consideración, viene expresado por:



$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{i=N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{i=N} m_i}$$

Que, obviando los índices de la sumatoria para simplificar la notación, e identificando con (m) a la masa de todo el sistema, podemos expresar como:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$$

Teniendo esto en cuenta, la ubicación del centro de masa dependerá de cómo está distribuida la materia del sistema en consideración, y por lo tanto los cambios temporales en dicha distribución o en el movimiento general del sistema, se traducirán en cambios temporales en el vector posición de su centro de masa, que podremos caracterizar mediante la derivada temporal de dicha magnitud, a la que en adelante identificaremos como vector velocidad del centro de masa del sistema, y que formalmente podremos expresar como:

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$$

Que teniendo en cuenta la definición de la coordenada vectorial del centro de masa, y en término de las coordenadas vectoriales de las partículas que lo integran, nos queda:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m}$$

Que expresada en términos del vector velocidad de cada una de las partículas que forman parte del sistema, resulta:

$$\vec{v}_c = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

Análogamente, los cambios temporales observados en el estado de movimiento del centro de masa del sistema estarán caracterizados por la derivada temporal de su vector velocidad, que reconoceremos como vector aceleración del centro de masa del sistema, y que en términos de las aceleraciones de cada una de las partículas nos quedará expresado como:

$$\vec{a}_c = \frac{\sum m_i \vec{a}_i}{m} \qquad 1.6$$

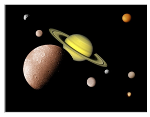
Ecuación de Movimiento para el Centro de Masa de un Sistema.
Teniendo en cuenta la expresión obtenida para el vector aceleración del centro de masa de un sistema y la conclusión (1.5) lograda anteriormente, es claro que esta última puede expresarse como:

$$\vec{F} = m\,\vec{a}_c \qquad 1.7$$

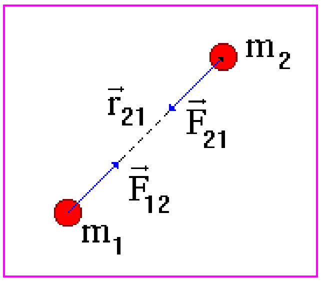
Que nos relaciona al vector aceleración del centro de masa de un sistema con la resultante de las fuerzas externas y la masa de todo el sistema en consideración.
Comparando (1.7) con (1.4) resulta que, los cambios temporales en el estado de movimiento del centro de masa de un sistema (caracterizados por su vector aceleración) estarán vinculados mediante (1.7), con la resultante de las fuerzas externas como si dicha resultante estuviera aplicada en dicho punto y la masa de todo el sistema concentrada en él.
Teniendo en cuenta lo mencionado en el párrafo anterior, la expresión (1.7) nos permitirá en adelante, describir el movimiento del centro de masa de un cuerpo o sistema, pensando a la totalidad de las fuerzas externas aplicadas en dicho punto y a la materia del sistema concentrada en el mismo.
Resulta importante destacar, que las fuerzas internas no intervienen en (1.7), por lo tanto podemos garantizar que las mismas son incapaces de modificar el estado de movimiento del centro de masa de un sistema. Por más fuerza que tuviéramos en nuestros brazos y resistencia en nuestro cuero cabelludo sería imposible levantarnos del mismo.
Asimismo resulta interesante observar que la relación (1.7), recientemente obtenida, no es la expresión formal de una Ley Física, muy por el contrario es la expresión formal de una consecuencia que resulta de la correcta aplicación de dos leyes físicas, la expresada formalmente mediante (1.4) y el principio de acción y reacción.
Finalmente es oportuno destacar que como el formalismo a desarrollar en esta parte del curso, estará basado en las expresiones (1.4) y (1.7), dicho formalismo nos permitirá describir el comportamiento de un cuerpo puntual o bien el del centro de masa del sistema que pudiera estar en consideración, en cuyo caso y como ya lo mencionáramos podremos pensar a la totalidad de las fuerzas externas aplicadas en dicho punto y a la masa del mencionado sistema concentrada en él, lo que nos autoriza a realizar lo que generalmente se conoce como diagrama de cuerpo aislado, que esencialmente se trata de una representación gráfica de las diferentes fuerzas externas a que está sometido el cuerpo como si estuvieran aplicadas en su centro de masa, tal como se muestra en las situaciones que se plantearán posteriormente.

1.06 GRAVITACIÓN UNIVERSAL.

Consideraremos a continuación aspectos vinculados con una de las interacciones más importantes en la naturaleza, en cuanto a que siempre estará presente ante la existencia de dos cuerpos cualesquiera y que en adelante identificaremos como Interacción Gravitatoria.
La interacción a la que hacemos referencia y que se encuentra directamente vinculada con la presencia de materia, da lugar a fuerzas que generalmente son de módulos pequeños y por lo tanto se necesitan instrumentos de mucha precisión, o bien diseñar experiencias con cierto nivel de sofisticación, para poder hacer determinaciones que permitan constatar la presencia de dicha interacción.
Sin embargo cuando las masas de los cuerpos que interactúan son de magnitudes importantes, como la masa de un planeta, por ejemplo la Tierra, o la masa de una estrella, por ejemplo el Sol, las fuerzas que resultan son de magnitudes tales que dan lugar a fenómenos fácilmente observables, como la caída de un cuerpo o el movimiento de los planetas en órbitas elípticas alrededor del Sol.



Suponiendo la existencia de dos partículas de masas (m_1) y (m_2) como las mostradas en la figura siguiente, la interacción gravitatoria existente entre ellas, dará lugar a un par de fuerzas atractivas, aplicadas sobre cada una de las partículas involucradas, tales que:



$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$$

Cuyos módulos, según los trabajos publicados por Newton, vienen dados por:

$$F_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \qquad 1.8$$

Conocida como la expresión formal de la Ley de Gravitación Universal, donde (G) es una constante universal, esto es, independiente de los cuerpos involucrados, cuyo valor, determinado experimentalmente y expresado en el sistema MKS es.

$$G = 6{,}67.10^{-11}\frac{N.m^2}{kg^2}$$

Teniendo en cuenta lo manifestado es claro que la fuerza a que estará sometida la partícula (2) como resultado de su interacción gravitatoria con la partícula (1) podrá expresarse vectorialmente, como:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

Que podemos expresar como:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_2 m_1}{r_{21}^2}\vec{e}_r \qquad 1.9$$

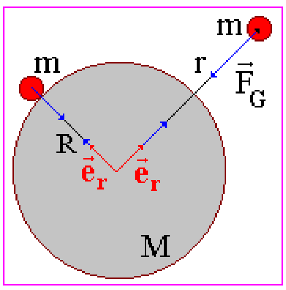
Donde:

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}_{21}}{r_{21}}$$

Es un vector radial unitario cuya dirección y sentido coincide con la del vector posición de la partícula 2 respecto de la 1.

Peso de un Cuerpo.

Teniendo en cuenta lo indicado anteriormente, resulta que la fuerza gravitatoria a la que se verá sometido un cuerpo de masa (m) como resultado de su interacción con un Planeta de masa (M), como se sugiere en la figura lateral, podremos expresarla como:



$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^2}\vec{e}_r$$

Donde (r) es la distancia entre el centro de masa del cuerpo y el del planeta con el que interactúa y (e_r) el vector unitario en la dirección radial, que se muestra en la figura lateral.

En particular suponiendo al cuerpo sobre la superficie del planeta y pensando a éste como una esfera de radio (R), la fuerza gravitatoria a la que se verá sometido el cuerpo, que identificaremos como su peso en la superficie de dicho planeta, vendrá expresada por:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{R^2}\vec{e}_r$$

Que en el caso de considerar la interacción con la Tierra y suponiendo a esta como una esfera, de la anterior obtenemos que la fuerza gravitatoria a la que se vera sometido un cuerpo de masa (m) sobre su superficie, que conocemos como el peso del cuerpo en la superficie del planeta, vendrá dado por:

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad \text{Donde:} \qquad \vec{g} = -G\frac{M}{R^2}\vec{e}_r$$

Magnitud que generalmente conocemos como "aceleración de la gravedad" que, como vemos, se trata de un vector cuya dirección coincide con la del vector radial unitario, dirigido hacia el centro de la tierra con un módulo que, teniendo en cuenta los valores para la masa y radio de la Tierra, resulta:

$$g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

Siendo oportuno destacar que la fuerza consecuencia de esta interacción estará aplicada sobre todas y cada una de las partículas que forman los cuerpos interactuantes, sin embargo y en virtud de la conclusión obtenida al considerar un sistema de cuerpos puntuales, a los efectos de describir el comportamiento del centro de masa de los cuerpos involucrados, podremos suponer a la totalidad de estas fuerzas aplicadas en el centro de masa de cada uno de estos cuerpos, como se sugiere en la figura anterior.
Considerando nuevamente la interacción gravitatoria entre un cuerpo de masa (m) y la Tierra, cuya masa identificaremos con (M), la aceleración del centro de masa de cada uno de los cuerpos, respecto de un sistema de referencia, por ejemplo fijo al Sol, será tal que:

Centro de Masa del Cuerpo — Centro de Masa de la Tierra

$$a = \frac{mg}{m} \quad \therefore \quad a = g \qquad\qquad A = \frac{mg}{M} \quad \therefore \quad a = \frac{m}{M}g$$

Por lo tanto:

$$A = \frac{m}{M}a$$

Como en la mayoría de las situaciones que consideraremos, la masa de la tierra es mucho mayor que la masa del cuerpo, de la anterior resulta que, a la aceleración del centro de masa de la tierra podremos despreciarla frente a la aceleración del centro de masa del cuerpo, y como una interesante ilustración del tema, se recomienda el video **Gravitación.**

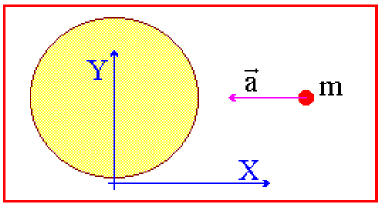
Fenómeno de Aparente Ingravidez.

Pensemos ahora en el caso de un cuerpo de masa (m), sometido a la interacción gravitatoria con un planeta de masa (M), como el sugerido en la figura siguiente, en donde experimentalmente hemos verificado la validez de la ecuación de Newton, con lo que, el módulo de la aceleración del centro de masa del cuerpo respecto de un sistema de referencia fijo al planeta será tal que:

$$ma = G\frac{mM}{r^2}$$

De donde obtenemos que:

$$a = G\frac{M}{r^2}$$

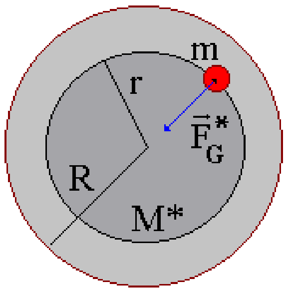


Que como vemos resulta, independiente de la masa del cuerpo considerado, siendo este el motivo por el que los objetos y astronautas flotan respecto de su nave espacial en órbita alrededor de un planeta, ya que la nave y todo su contenido estarán sometidos a la misma aceleración y como todo el sistema partió con iguales condiciones iniciales, la nave espacial, su contenido y los astronautas se moverán con la misma velocidad dando lugar al fenómeno de ingravidez, que nada tiene que ver con la ausencia de gravedad como se suele creer comúnmente. Justamente la presencia de la fuerza gravitatoria es la que mantiene en órbita el sistema y como una interesante ilustración del tema, se recomienda el video **Ingravidez.**

Masa Inercial y Masa Gravitatoria
Por estar fuertemente relacionado con el tema considerado, resulta oportuno destacar que la conclusión obtenida anteriormente es consecuencia de haber simplificado la masa del cuerpo en la primera igualdad, situación que merece una aclaración adicional ya que en la ecuación de Newton la masa involucrada caracteriza la inercia del cuerpo, o sea la capacidad que posee para mantener su estado de movimiento y que hemos identificado como masa inercial, mientras que en la ley de gravitación, las masas involucradas, que en adelante identificaremos como masas gravitatorias, caracterizan una propiedad diferente, relacionada con la "capacidad" que tienen los cuerpos de interactuar gravitatoriamente y por lo tanto no es válida la simplificación de ambas masas, ya que como lo acabamos de mencionar, caracterizan propiedades diferentes, que los cuerpos poseen.
Sin embargo, teniendo en cuenta que la Ley de Caída de los Cuerpos, enunciada por Galileo prevé que "en un campo gravitatorio, todos los cuerpos, independientemente del valor que tenga su masa, caerán con la misma aceleración", debemos aceptar como válida la simplificación realizada para compatibilizar ambas situaciones, siendo este un controvertido asunto que retomaremos posteriormente.

Fuerza Gravitatoria en el Interior de un Planeta.
Considerando ahora un cuerpo en el interior de un planeta, puede demostrarse que la fuerza gravitatoria a la que estará sometido es equivalente a la que obtendríamos como consecuencia de su interacción gravitatoria con la materia contenida en la esfera cuyo radio coincide con la distancia a la que se encuentra la partícula del centro del planeta, como se sugiere en la figura siguiente, con lo que designando con (M*) a la masa contenida en la esfera de radio (r), la fuerza a la que se verá sometida la partícula vendrá dada por:

$$\vec{F}^{*} = -\,G\,\frac{mM^{*}}{r^{2}}\,\vec{e}_r$$



Suponiendo constante la densidad de materia en el Planeta, y designando con (M) a su masa, entonces:

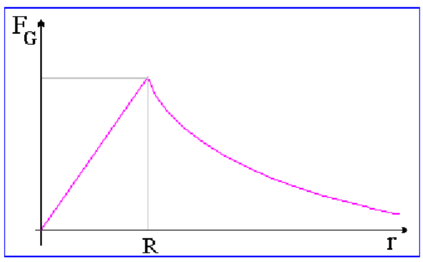
$$\frac{M^{*}}{r^{3}} = \frac{M}{R^{3}} \qquad \therefore \qquad M^{*} = \frac{M}{R^{3}}\,r^{3}$$

Con lo que:

$$\vec{F}^{*} = -\,G\,\frac{mM}{R^{3}}\,r\,\vec{e}_r \qquad 1.10$$

Que como vemos resulta proporcional a la distancia a la que se encuentra la partícula del centro del planeta, siendo interesante observar que, como era de esperar, (1.9) y (1.10) arrojan expresiones coincidentes para puntos sobre la superficie de la esfera, esto es, para puntos con $r = R$, en cuyo caso:

$$F = G\,\frac{mM}{R^{2}}$$



Finalmente, teniendo en cuenta las expresiones obtenidas para la fuerza gravitatoria a la que se verá sometida una partícula en puntos interiores y exteriores al Planeta, resulta que una gráfica cualitativa de dicha función se verá como se muestra en la figura lateral.