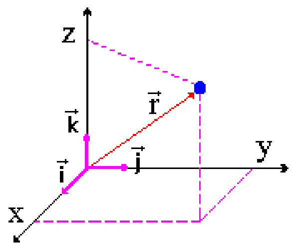
1.07 COMPONENTES CARTESIANAS.

Puesto que las ecuaciones (1.4) y (1.7) son ecuaciones vectoriales que relacionan la resultante de las fuerzas de interacción con el vector aceleración de una partícula o del centro de masa de un sistema, en el momento de evaluar sus componentes ortogonales, las ecuaciones escalares resultantes tomarán diferentes formas según el sistema de coordenadas seleccionado.

Así cuando nos referimos al vector posición de una partícula, implícitamente nos estamos refiriendo a un conjunto de tres funciones escalares, en términos de las cuales podemos expresar las componentes del mencionado vector.

Estas funciones escalares podrían ser, el conjunto de coordenadas cartesianas según direcciones fijas a nuestro sistema de referencia (xyz), como se sugiere en la figura lateral donde los vectores unitarios (**i,j,k**) caracterizan direcciones ortogonales fijas a nuestro sistema de referencia, que no necesariamente deberán ser coincidentes con estas, y cuyos sentidos nos indican el sentido en que crecen cada una de las mencionadas coordenadas.



En función de dichas coordenadas, el vector posición de una partícula puede expresarse en componentes según las direcciones caracterizadas por los vectores unitarios indicados, como:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Teniendo en cuenta que la posición de la partícula cambiará en el tiempo, las coordenadas serán, en general, funciones escalares del tiempo, que expresaremos como:

$$x = x(t)$$

$$y = y(t)$$

$$z = z(t)$$

Que sin lugar a dudas debemos interpretar como las ecuaciones paramétricas de la trayectoria a lo largo de la que se desplazará la partícula, y en término de las cuales el vector posición quedará expresado como:

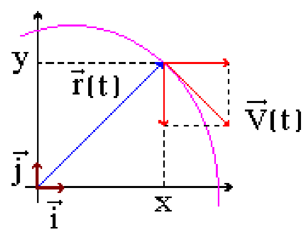
$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$

Resulta oportuno mencionar que el conjunto de coordenadas cartesianas no es el único conjunto adecuado para describir el comportamiento de un sistema, a menudo resultará útil el empleo de otros tipos de coordenadas, que serán tratadas posteriormente a lo largo del presente volumen.

Suponiendo ahora que la partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria plana y orientando los ejes del sistema de referencia, de manera que el plano (xy) coincida con el plano del movimiento, definido por los vectores posición y velocidad, es claro que el vector posición, en función de las coordenadas cartesianas seleccionadas y en componentes según las direcciones de los correspondientes vectores unitarios, quedará expresado como:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

Derivando temporalmente la anterior y teniendo en cuenta que los vectores unitarios caracterizan direcciones fijas al sistema de referencia desde el que se calcula dicha derivada, con lo que sus derivadas temporales serán nulas, obtenemos la siguiente expresión para el vector velocidad en función de las derivadas temporales de las coordenadas, indicadas con un punto sobre la función para facilitar la notación, y en componentes según las direcciones de los vectores unitarios, que se muestran cualitativamente en la figura lateral.



$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{i} + \dot{y}(t)\,\vec{j}$$

Análogamente, derivando temporalmente la anterior, obtenemos que el vector aceleración evaluado en componentes según las direcciones en consideración, vendrá dado por:

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{i} + \ddot{y}(t)\,\vec{j}$$

Suponiendo que las componentes de la ecuación de Newton, que a menudo identificaremos como ecuación de movimiento, son evaluadas según direcciones las direcciones de un sistema cartesiano y por lo tanto, fijas al sistema de referencia, para el caso de un movimiento plano y orientando los ejes del sistema de coordenadas de manera que el plano (xy) coincida con el plano del movimiento, obtendremos una ecuación vectorial de la forma:

$$\vec{F} = m\ddot{x}\,\vec{i} + m\ddot{y}\,\vec{j}$$

De la que resultará el sistema de ecuaciones escalares:

$$F_x = m\,\ddot{x}$$

$$F_y = m\,\ddot{y}$$

Donde con (F_x) indicamos a la componente de la resultante de las fuerzas de interacción, según la dirección del eje (x) y con (Fy) a la componente de la mencionada resultante según la dirección del eje (y), que en general darán lugar a un sistema de ecuaciones en las mismas intervendrán, tanto las coordenadas de la partícula como sus derivadas temporales, que reconoceremos como ecuaciones diferenciales y cuya solución nos proporcionará una descripción del comportamiento del sistema involucrado.
Teniendo en cuenta las expresiones logradas para las componentes cartesianas de los vectores posición, velocidad y aceleración, resulta oportuno destacar que la derivada temporal de una componente aporta únicamente a la respectiva componente de la magnitud vectorial resultante, aspecto éste que nos permitirá tratar en forma independiente las características del movimiento según cada una de las direcciones seleccionadas. Por lo tanto, suponiendo conocidas las componentes cartesianas de la resultante de las fuerzas de interacción, mediante las anteriores podremos obtener expresiones para las componentes del vector aceleración, con lo que diferenciando dichas componentes, obtenemos:

$$d\dot{x} = \ddot{x}(t)\,dt$$

$$d\dot{y} = \ddot{y}(t)\,dt$$

Integrando ambos miembros de las anteriores entre límites físicamente compatibles, correspondientes al instante inicial y a un instante posterior cualquiera, resulta:

$$\int_{\dot{x}_0}^{\dot{x}} d\dot{x} = \int_{\circ}^{t} \ddot{x}(t)\,dt$$

$$\int_{\dot{y}_0}^{\dot{y}} d\dot{y} = \int_{\circ}^{t} \ddot{y}(t)\,dt$$

De donde obtenemos que las componentes cartesianas del vector velocidad, en término de sus valores en el instante inicial y en función del tiempo vendrán dadas por:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_\circ + \int_{\circ}^{t} \ddot{x}(t)\,dt$$

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_\circ + \int_{\circ}^{t} \ddot{y}(t)\,dt \qquad 1.8$$

Que a menudo expresaremos con la notación siguiente:

$$v_x(t) = v_{\circ x} + \int_{\circ}^{t} a_x(t)\,dt$$

$$v_y(t) = v_{\circ y} + \int_{\circ}^{t} a_y(t)\,dt$$

Procediendo de manera similar, o sea, diferenciando las anteriores y luego integrando entre límites compatibles, las componentes cartesianas del vector posición, en término de sus valores en el instante inicial y en función del tiempo, nos quedan expresadas como:

$$x(t) = x_\circ + \int_\circ^t v_x(t)\,dt \qquad 1.9$$

$$y(t) = y_\circ + \int_\circ^t v_y(t)\,dt$$

Resultando para la tercera componente de ambas magnitudes, esto es, en la dirección del eje (z), las expresiones que se indican a continuación, que serán de utilidad para aquellos casos en los que la trayectoria de la partícula no estuviera contenida en un plano.

$$v_z(t) = v_{\circ z} + \int_\circ^t a_z(t)\,dt$$

$$z(t) = z_\circ + \int_\circ^t v_z(t)\,dt$$

1.08 APLICACIONES DE LOS SISTEMAS CARTESIANOS.

En esta oportunidad consideraremos algunas aplicaciones del empleo de sistemas cartesianos para describir las características del movimiento de una partícula en situaciones de interés particular.

Movimiento Rectilíneo Uniformemente Variado.

Trataremos aquella situación en la que un cuerpo está sometido a una fuerza constante cuya dirección coincide con aquella en la que se movía inicialmente, en cuyo caso se desplazará a lo largo de una trayectoria recta con una aceleración constante, con lo que, orientando los ejes de nuestro sistema de coordenadas cartesianas de manera que el eje (x) coincida con la dirección de la trayectoria a lo largo de la que se desplaza el cuerpo y teniendo en cuenta (1.8) su velocidad en cualquier instante posterior al inicial, vendrá dada por:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_\circ + \int_\circ^t a(t)\,dt$$

De donde obtenemos, que la única componente del vector velocidad, en función del tiempo y de su valor en el instante inicial, vendrá dada por:

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_\circ + a\,t$$

Que en adelante expresaremos como:

$$v(t) = v_\circ + a\,t$$

Con lo que, teniendo en cuenta la anterior en la segunda de las relaciones (1.8), obtenemos que la posición de la partícula medida a lo largo de la trayectoria vendrá dada por:

$$x(t) = x_\circ + \int_\circ^t (v_\circ + a\,t)\,dt$$

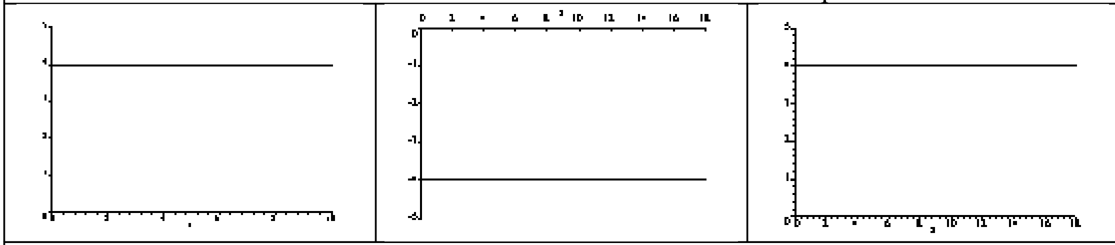
Con lo que, dicha magnitud en función del tiempo y de las condiciones iniciales, nos queda:

$$x(t) = x_\circ + v_\circ t + \tfrac{1}{2} a\,t^2$$

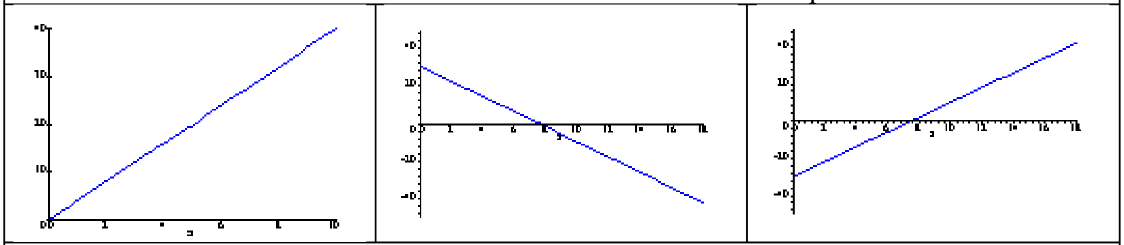
Las figuras siguientes nos muestran gráficas cualitativas de las funciones recientemente obtenidas para diferentes valores de la aceleración y de las condiciones iniciales involucradas, según se indica en cada uno de los casos que se consideran.

$a = 4$ m/s^2 $v_o = 0$ $x_o = 20$ m	$a = -4$ m/s^2 $v_o = 0$ $x_o = 20$ m	$a = 4$ m/s^2 $V_o = -30$ m/s $x_o = 60$ m
En el instante inicial la partícula se encontraba en reposo a 20 m del origen del sistema de referencia y es sometida a una aceleración de 4 m/s^2 en el sentido en que crece la coordenada espacial	En el instante inicial la partícula pasa por un punto a 20 m del origen del sistema de referencia desplazándose con una velocidad de 30 m/s en el sentido en que crece la coordenada espacial y es sometida a la aceleración indicada, en sentido opuesto el movimiento en dicho instante	En el instante inicial la partícula pasa por un punto a 60 m del origen del sistema de referencia desplazándose con una velocidad de 30 m/s en el sentido en que decrece la coordenada espacial, sometida a la aceleración indicada, en sentido opuesto el movimiento en dicho instante

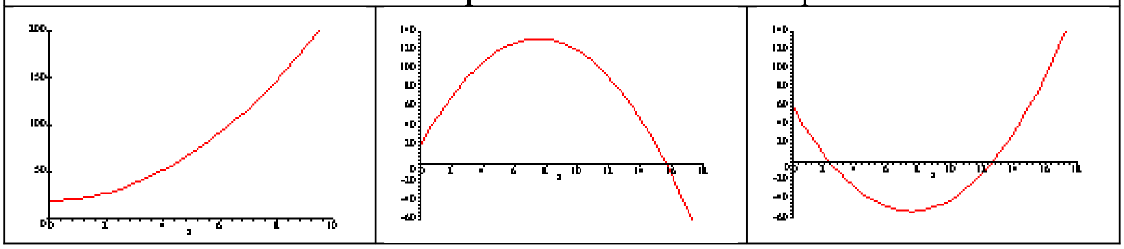
Gráficos de la **aceleración** en función del tiempo



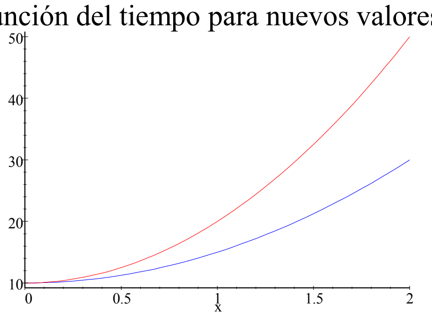
Gráficos de la **velocidad** en función del tiempo



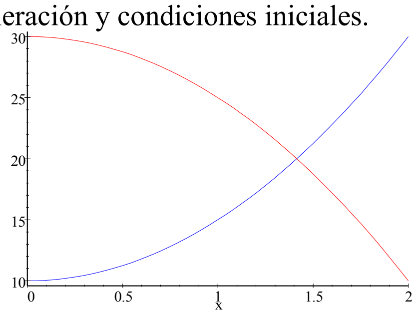
Gráficos de la **posición** en función del tiempo



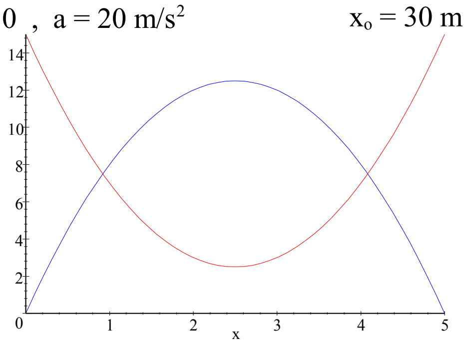
Como una ilustración mas del tema, las figuras siguientes muestran gráficas de la posición en función del tiempo para nuevos valores de la aceleración y condiciones iniciales.



$x_o = 10$ m , $v_o = 0$, $a = 10$ m/s^2
$x_o = 10$ m , $v_o = 0$, $a = 20$ m/s^2



$x_o = 10$ m , $v_o = 0$, $a = 10$ m/s^2
$x_o = 30$ m , $v_o = 0$, $a = -10$ m/s^2



$x_o = 0$ m , $v_o = 10$ m/s , $a = -4$ m/s^2
$x_o = 15$ m , $v_o = -10$ m/s , $a = 4$ m/s^2

Finalmente, eliminando el tiempo entre las expresiones obtenidas para la velocidad y posición, obtenemos una relación entre el cuadrado de la velocidad y el camino recorrido por la partícula en el intervalo de tiempo correspondiente.

$$v^2 = v_\circ^2 + 2a\left(x - x_\circ\right)$$

Movimiento Rectilíneo Uniforme.

Finalmente resulta oportuno mencionar que una situación particular de la considerada recientemente es aquella en la que, la aceleración de la partícula es nula, que dará lugar a un movimiento generalmente conocido como Rectilíneo Uniforme, en cuyo caso su velocidad será constante y su posición en función del tiempo vendrá dada por:

$$x = x_o + v\,t$$

Laboratorio Virtual I.
Determinación de Velocidades en Movimientos Rectilíneos Uniformes.

Ejecutando el archivo **Mru.htm** incluido en la carpeta del mismo nombre, podrá acceder a una simulación que, cronómetro en mano, le permitirá determinar el tiempo empleado por un cuerpo en recorrer con **velocidad constante**, longitudes que deberá seleccionar de aquellas claramente indicada sobre la superficie libre de rozamiento a lo largo de la que cual se mueve, y con los valores obtenidos, deberá:

- Representar, en un par de ejes ortogonales, el camino recorrido por el cuerpo en función del tiempo empleado en recorrerlo.
- Trazar la recta que, pasando por el origen, mejor ajuste al conjunto de puntos solicitados anteriormente.
- Determinar la velocidad del cuerpo a partir de la pendiente de la recta requerida en el ítem anterior, teniendo en cuenta que para la situación en consideración, donde la coordenada en el instante inicial es nula, el camino recorrido y el tiempo empleado en recorrerlo, están relacionados mediante la expresión.

$$x = v\,t$$

Con el propósito de mejorar la calidad de los resultados se recomienda realizar varias mediciones del tiempo empleado en cada caso, con lo que podrá obtener un promedio de dicha magnitud para ser empleado en la actividad propuesta, siendo recomendable ordenar los valores obtenidos en una tabla como la que se muestra a continuación.

Camino Recorrido	Tiempos Empleados	Promedio

Finalmente y con el propósito de realizar comparaciones, deberá modificar aleatoriamente la velocidad del cuerpo mediante el icono **"nuevo"** incluido en la simulación, que se recomienda determinar mediante el procedimiento indicado anteriormente.

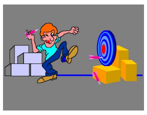
Laboratorio Virtual II.
Determinación de Aceleraciones en Movimientos Rectilíneos Uniformemente Variados.

Ejecutando el archivo **Mruv.htm** incluido en la carpeta del mismo nombre, podrá acceder a una simulación que, cronómetro en mano, le permitirá determinar el tiempo empleado por un cuerpo en recorrer con **aceleración constante**, longitudes que deberá seleccionar de aquellas claramente indicada sobre la superficie libre de rozamiento a lo largo de la cual se mueve, y con los valores obtenidos, deberá:

- Representar el camino recorrido en función del tiempo empleado.
- Representar el camino recorrido en función del cuadrado del tiempo empleado.
- Trazar la recta que mejor ajuste al conjunto de puntos obtenidos en la representación solicitada en el ítem anterior.
- Determinar la aceleración del cuerpo a partir de la pendiente de la recta requerida en el ítem anterior, teniendo en cuenta que para la situación en consideración.

$$x = \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

Al igual que en el caso anterior y con el propósito de mejorar la calidad de los resultados, se recomienda realizar varias mediciones del tiempo empleado en cada caso, con lo que podrá



obtener un promedio para ser empleado en la actividad propuesta, siendo conveniente ordenar los valores obtenidos en una tabla como la que se muestra a continuación.

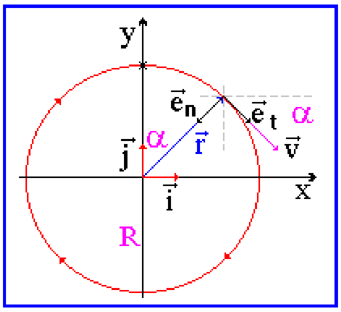
Caminos Recorridos	Tiempos Empeados	Promedio	Cuadrado del Promedio

Finalmente y con el propósito de realizar comparaciones, deberá modificar aleatoriamente la aceleración del cuerpo mediante el icono **"nuevo"** incluido en la simulación, que se recomienda determinar mediante el procedimiento indicado anteriormente.

Movimiento Circular Uniformemente Variado.

Como otra aplicación del manejo de un sistema cartesiano, consideremos el caso de una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria circular de radio R como la indicada en la figura lateral, donde la coordenada angular varia con el tiempo según:

$$\alpha\left(t\right) = \tfrac{1}{2}\,k\,t^2$$



En este caso, su vector posición respecto del origen del sistema de referencia indicado en la figura y evaluado en componentes según las direcciones de dicho sistema queda expresado en términos de la coordenada angular, como:

$$\vec{r} = R\,\mathrm{sen}\left(\alpha\right)\vec{i} + R\cos\left(\alpha\right)\vec{j}$$

De donde luego de derivar temporalmente, obtenemos para el vector velocidad la expresión siguiente:

$$\vec{v} = R\dot{\alpha}\left[\cos\left(\alpha\right)\vec{i} - \mathrm{sen}\left(\alpha\right)\vec{j}\right]$$

Donde la magnitud entre corchetes no es otra cosa que un vector unitario, tangente a la trayectoria en cada punto, como el indicado en la figura anterior, con lo que al vector velocidad de la partícula podemos expresarlo en términos de ésta nueva magnitud, como:

$$\vec{v} = R\dot{\alpha}\;\vec{e}_t$$

Finalmente, derivando temporalmente la expresión conseguida para el vector velocidad en componentes cartesianas, el vector aceleración de la partícula nos queda expresado en dichas componentes, como:

$$\vec{a} = R\ddot{\alpha}\left[\cos\left(\alpha\right)\vec{i} - \mathrm{sen}\left(\alpha\right)\vec{j}\right] + R\dot{\alpha}^{\,2}\left[-\,\mathrm{sen}\left(\alpha\right)\vec{i} - \cos\left(\alpha\right)\vec{j}\right]$$

Donde las magnitudes entre corchetes son, el vector tangente unitario considerado anteriormente y la restante, un vector también unitario, pero normal a la trayectoria en cada punto y dirigido hacia el centro de la misma como se indica en la figura anterior, con lo que, al vector aceleración en componentes según estas nuevas direcciones podemos expresarlo como:

$$\vec{a} = R\,\ddot{\alpha}\;\vec{e}_t + R\,\dot{\alpha}^{\,2}\;\vec{e}_n$$

Esto es, como la suma de una componente tangente a la trayectoria, cuyo módulo está relacionado con la derivada segunda de la coordenada angular y por lo tanto con las variaciones temporales en el módulo del vector velocidad, mas una componente normal a la trayectoria, dirigida hacia el centro de la misma, cuyo módulo esta indudablemente relacionado el módulo del vector velocidad y con los cambios observados en la dirección de dicha magnitud, lo que formalmente podemos expresar como:

$$\vec{a} = \dot{v}\,\vec{e}_t + \frac{v^2}{R}\,\vec{e}_n$$

Teniendo en cuenta las conclusiones anteriores y la ecuación de Newton, resulta que para la situación en consideración, la partícula deberá estar sometida a interacciones tales que den lugar a una fuerza que podamos expresar como la suma de una componente normal a la trayectoria, asociada con los cambios observados en la dirección del vector velocidad y dirigida hacia el centro de la misma, fuerza centrípeta, cuyo módulo vendrá dado por:

$$F_n = mR\dot{\alpha}^2 \quad \therefore \quad F_n = m\frac{v^2}{R}$$

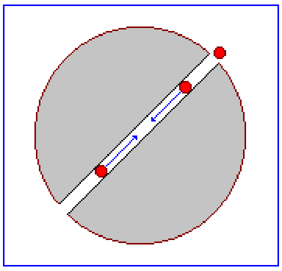
Mas una componente tangente a la trayectoria, cuyo módulo estará relacionado con los cambios observados en el módulo del vector velocidad y que podemos expresar como:

$$F_t = m\,R\,\ddot{\alpha}\,\vec{e}_t \quad \therefore \quad F_t = m\,\dot{v}$$

Movimiento en el Interior de un Planeta.

Como otra interesante aplicación, consideremos la hipotética situación de una partícula que se deja caer desde la superficie terrestre en el interior de un túnel perforado diametralmente como se sugiere en la figura siguiente y designando con (x) a la distancia a la que se encuentra la partícula del centro del planeta, y teniendo en cuenta las conclusiones obtenidas anteriormente, la partícula se verá sometida a una fuerza dirigida hacia el centro del planeta que vectorialmente podemos expresar como:

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{R^3}x\,\vec{i}$$



Con lo que, de la ecuación de Newton para la situación en consideración obtenemos que la aceleración de la partícula en el interior del planeta deberá ser tal que:

$$m\ddot{x} = -G\frac{mM}{R^3}x \quad \therefore \quad \ddot{x} = -G\frac{M}{R^3}x$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que dicha magnitud puede expresarse como:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx}\dot{x}$$

De las anteriores resulta:

$$\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dx} = -G\frac{M}{R^3}x$$

De donde obtenemos:

$$\dot{x}\,d\dot{x} = -G\frac{M}{R^3}x\,dx$$

Que integrando entre límites compatibles con las condiciones iniciales nos queda:

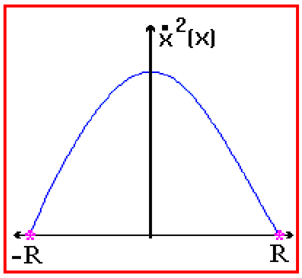
$$\int_{\circ}^{\dot{x}}\dot{x}\,d\dot{x} = -\int_{R}^{x}G\frac{M}{R^3}x\,dx$$

De donde resulta:

$$\dot{x}^2 = G\frac{M}{R^3}(R^2 - x^2)$$

Con lo que el movimiento de la partícula estará acotado entre los extremos del túnel, ya que de lo contrario obtendríamos valores imaginarios para la velocidad de la partícula, lo que indudablemente carece de significado físico.

Resultando que el cuadrado de la velocidad del centro de masa del cuerpo variará con su distancia al centro del planeta como se indica en la figura siguiente, donde la máxima velocidad del cuerpo la tendremos en el instante en que se anula su coordenada radial, esto es, en el instante en que pasa por el centro del planeta, y cuyo valor vendrá dado por:



$$\dot{x}_{max} = \sqrt{G\frac{M}{R}}$$

Con el propósito de obtener una expresión para la coordenada espacial en función del tiempo tengamos en cuenta que de la expresión obtenida para el cuadrado de su velocidad en función de dicha coordenada, resulta:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}(R^2 - x^2)}$$

De donde:

$$\frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}\,dt$$

Que definiendo la magnitud:

$$w = \sqrt{\frac{GM}{R^3}}$$

Podemos expresar como:

$$\frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = w\,dt$$

Que al integrar ambos miembros entre los límites correspondientes nos queda:

$$\int_R^x \frac{dx}{\sqrt{(R^2 - x^2)}} = w\int_0^t dt$$

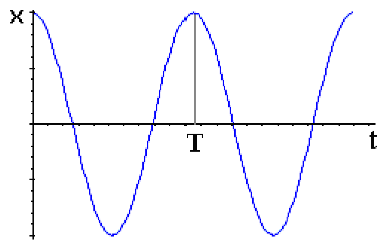
De donde luego de efectuar la integración obtenemos:

$$ar\cos\left(\frac{x}{R}\right) = w\,t$$

Con lo que la coordenada de la partícula variará en el tiempo según:

$$x(t) = R\cos(wt)$$

Cuya gráfica se muestra en la figura lateral, donde con **T** identificamos al tiempo al cabo del cual completa una oscilación, con lo que dicha magnitud, que en adelante identificaremos como período, deberá ser tal que:



$$x(t + T) = x(t)$$

Por lo tanto deberá ser tal que:

$$R\cos[w(t + T)] = R\cos(wt)$$

Con lo que dicha magnitud estará relacionada con w mediante:

$$w\,T = 2\pi \quad \therefore \quad T = \frac{2\pi}{w}$$

Por lo tanto podemos afirmar que la partícula oscilará entre los extremos del túnel, con un período dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Definiendo la frecuencia como el número de oscilaciones que realiza en la unidad de tiempo, es claro que dicha magnitud estará relacionada con el período de la oscilación, mediante:

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Con lo que de las anteriores resulta:

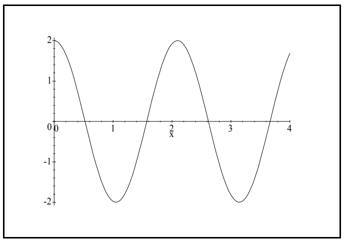
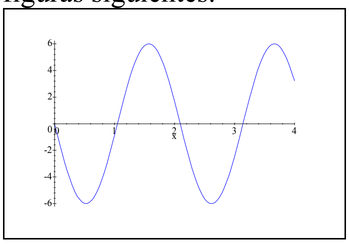
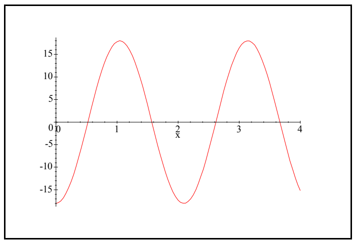
$$w = 2\pi\nu$$

Que en adelante identificaremos como frecuencia angular.
Finalmente y teniendo en cuenta la expresión obtenida para la posición en función del tiempo, resulta que la velocidad y aceleración de la partícula en función del tiempo, vendrán dadas por:

$$v(t) = -Rw\,\mathrm{sen}(wt)$$

$$a(t) = -Rw^2\cos(wt)$$

Con lo que la posición, velocidad y aceleración de la partícula variarán en el tiempo como se muestra cualitativamente en las figuras siguientes.

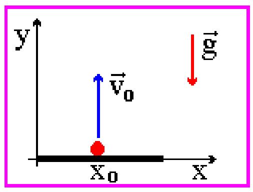
Finalmente y como una interesante ilustración del tema, se recomienda la simulación a la que puede acceder ejecutando el archivo **Tunel.htm**, incluido en la carpeta del mismo nombre, destinada a ilustrar las características del movimiento de un cuerpo a lo largo de túneles cuya geometría podrá establecer manualmente, donde podrá observar que el período de la oscilación es independiente de la longitud del túnel considerado.

1.09 TIRO DE CORTO ALCANCE.

Tiro Vertical.

Como otra aplicación del manejo de componentes cartesianas y de los temas considerados anteriormente, trataremos el caso de una partícula que se lanza verticalmente con una determinada velocidad inicial, como se sugiere en la figura siguiente.

Suponiendo despreciable su interacción con la atmósfera y que el módulo de la velocidad inicial es pequeño como para aceptar que no se aleja demasiado de la superficie terrestre, entonces a la fuerza gravitatoria y por lo tanto la aceleración de la partícula podremos considerarla constante y con un módulo de 9,81 m/s^2 dirigida verticalmente hacia el centro del planeta, como se sugiere en la figura lateral.



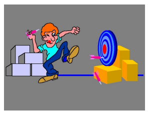
Teniendo en cuenta lo indicado, de (1.8) y (1.9), resulta que la única componente del vector velocidad nos queda en la dirección vertical, y variará en el tiempo según:

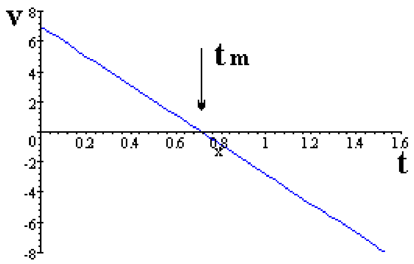
$$v(t) = v_\circ - g\,t$$

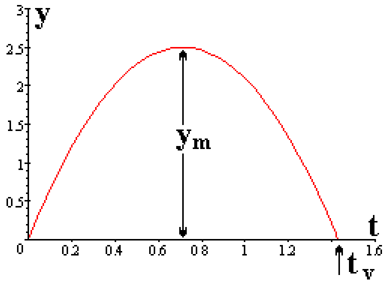
Con lo que su coordenada vertical en función del tiempo vendrá dada por:

$$y(t) = v_\circ t - \tfrac{1}{2}g\,t^2$$

Resultando para cada una de las funciones, gráficas cualitativas como las que se muestran a continuación, obtenidas para una velocidad inicial de 7 m/s







Puesto que la altura máxima es alcanzada en el instante en que se invierte el sentido del movimiento, y por lo tanto en el instante en que la velocidad de la partícula se anula, de las anteriores resulta que el tiempo al cabo del cual se alcanza dicha altura deberá ser tal que:

$$v_\circ - g\,t_m = 0 \quad \therefore \quad t_m = \frac{v_\circ}{g}$$

Con lo que la altura máxima vendrá dada por:

$$y_m = v_\circ t_m - \tfrac{1}{2} g\, t_m^2 \quad \therefore \quad y_m = \frac{v_\circ^2}{2g}$$

Definiendo el tiempo de vuelo (t_V), como el tiempo al cabo del cual la coordenada vertical toma el mismo valor que aquel desde donde fue lanzada, de las anteriores resulta:

$$t_v = 2\frac{v_\circ}{g}$$

Finalmente, eliminando el tiempo de las expresiones para la velocidad y posición del proyectil, resulta que la velocidad en función de la coordenada vertical, vendrá dada por.

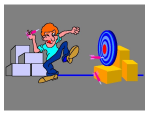
$$v(y) = \pm\left(v_\circ^2 - 2gy\right)^{1/2}$$

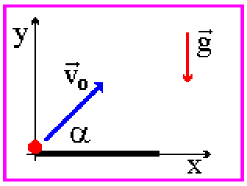
Laboratorio Virtual III.
Tiro Vertical de Corto Alcance.
Ejecutando el archivo **Vertical.htm**, incluido en la carpeta del mismo nombre, podrá acceder a una simulación que le permitirá realizar lanzamientos verticales de proyectiles con diferentes condiciones iniciales y observar, las variaciones temporales de su vector velocidad, la gráfica de su coordenada vertical en función del tiempo y determinar el tiempo de vuelo de dicho proyectil mediante el cronómetro que la simulación ofrece.
Con dicha simulación deberá realizar por lo menos **tres** lanzamientos desde el origen con diferentes velocidades iniciales y en cada caso, determinar el tiempo de vuelo del proyectil para obtener a partir de dicha medición, la velocidad de cada lanzamiento y la máxima altura alcanzada por el mismo, teniendo en cuenta que para la situación en consideración.

$$t_v = 2\frac{v_\circ}{g} \qquad\qquad y_m = \frac{v_\circ^2}{2g}$$

Con el propósito de mejorar la calidad de los resultados y para cada lanzamiento, deberá determinar, por lo menos, cinco valores del tiempo de vuelo y con ellos el un promedio de dicha magnitud, para emplearlo en los cálculos solicitados.

Tiro Oblicuo de Corto Alcance.
Consideraremos a continuación el caso de una partícula lanzada oblicuamente, bajo condiciones similares a las requeridas para un tiro vertical, como se sugiere en la figura siguiente, donde suponemos que el punto de lanzamiento coincide con el origen del sistema de coordenadas empleado para evaluar las ecuaciones vectoriales involucradas. Con lo que la situación en consideración difiere de la anterior únicamente en lo que a las condiciones iniciales del problema se refieren, que en este caso podemos expresar como.





$$\vec{r}_\circ = 0$$

$$\vec{v}_\circ = v_\circ \cos(\alpha)\,\vec{i} + v_\circ \operatorname{sen}(\alpha)\,\vec{j}$$

Donde α es el ángulo entre la dirección en que se efectúa el lanzamiento y la dirección horizontal, con lo que las componentes cartesianas del vector velocidad en el instante inicial, nos quedan expresadas como:

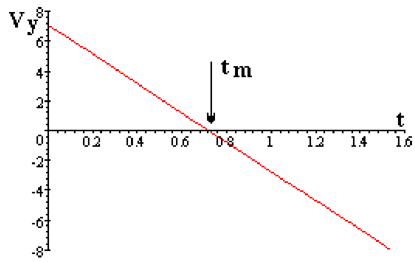
$$v_{\circ x} = v_\circ \cos(\alpha)$$

$$v_{\circ y} = v_\circ \operatorname{sen}(\alpha)$$

Empleando la notación indicada y teniendo en cuenta que nuevamente el vector aceleración tiene únicamente componente en la dirección vertical, de (1.8) y (1.9) obtenemos que las componentes cartesianas del vector velocidad de la partícula en función del tiempo vendrán dadas por:

$$v_x(t) = v_{\circ x}$$

$$v_y(t) = v_{\circ y} - g\,t$$



Con lo que estamos en condiciones de garantizar que la componente horizontal de dicha magnitud permanecerá constante mientras la componente vertical variará linealmente con el tiempo como se muestra en la figura lateral, para una velocidad inicial de 10 m/s y un ángulo de lanzamiento de 45º.

Teniendo en cuenta que el proyectil alcanza la máxima altura en el instante en que se anula la componente vertical de su vector velocidad, resulta que dicho instante será tal que.

$$v_{\circ y} - g\,t_m = 0$$

De donde obtenemos:

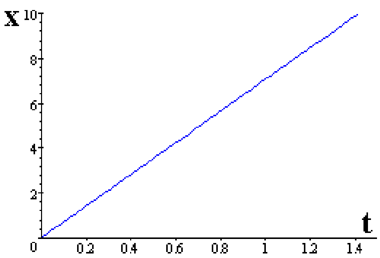
$$t_m = \frac{v_{\circ y}}{g}$$

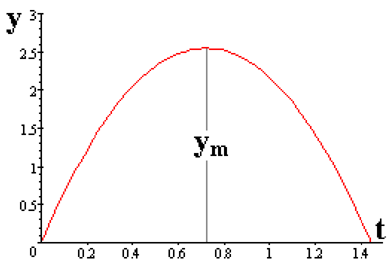
Teniendo en cuenta nuevamente las expresiones (1.8) y (1.9), de las anteriores resulta que, las componentes cartesianas del vector posición, vendrán dadas por:

$$x(t) = v_{\circ x}\,t$$

$$y(t) = v_{\circ y}\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2$$

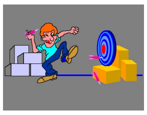
Cuyas gráficas cualitativas se muestran en las figuras siguientes para un lanzamiento con las condiciones iniciales consideradas anteriormente:





Teniendo en cuenta la expresión obtenida para el instante en que el proyectil alcanza la máxima altura, resulta que dicha magnitud, indicada en la figura anterior, vendrá dada por:

$$y_m = \frac{v_{\circ y}^2}{2g}$$



Y de la expresión para la coordenada horizontal en función del tiempo, obtenemos que el valor de dicha coordenada en ese instante, vendrá dada por.

$$x_m = \frac{v_{\circ x} v_{\circ y}}{g}$$

Que expresadas en término del ángulo con el que se efectúa el lanzamiento nos quedan:

$$y_m = \frac{v_\circ^2 \operatorname{sen}^2(\alpha)}{2g}$$

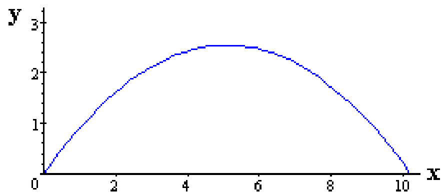
$$x_m = \frac{v_\circ^2 \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$$

Con el propósito de obtener la ecuación de la trayectoria a lo largo de la que se desplazará el proyectil procederemos a eliminar el tiempo entre las componentes cartesianas del vector posición. Para esto, de la componente horizontal obtenemos:

$$t = \frac{x}{v_{\circ x}}$$

Con lo que, la mencionada ecuación de la trayectoria nos queda:

$$y = \frac{v_{\circ y}}{v_{\circ x}} x - \frac{1}{2}\frac{g}{v_{\circ x}^2} x^2$$



Que corresponde a una parábola, cuya gráfica se muestra en la figura lateral, para las mismas condiciones iniciales que las empleadas en las gráficas anteriores, o sea una velocidad de 10 m/s y un ángulo de 45º.

Designando como tiempo de vuelo al intervalo de tiempo necesario para que la coordenada vertical vuelva a tomar el valor inicial, resulta que para un lanzamiento desde el origen del sistema de referencia, dicho tiempo será tal que:

$$v_{\circ y} t_v - \frac{1}{2} g\, t_v^2 = 0$$

Desechando la solución trivial que corresponde al instante del lanzamiento, de la anterior resulta que el tiempo de vuelo vendrá dado por:

$$t_v = 2\frac{v_{\circ y}}{g}$$

Que como era de esperar, dada la simetría de la trayectoria, resulta el doble del tiempo que el proyectil tarda en alcanzar su máxima altura.

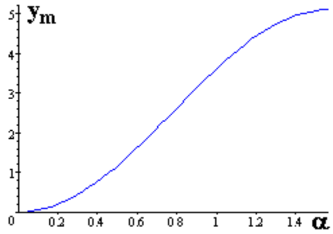
Teniendo en cuenta esta conclusión en la expresión obtenida para la coordenada horizontal en función del tiempo, resulta que el valor de dicha coordenada, en el instante en que nuevamente se anula la coordenada vertical, que en adelante identificaremos como alcance del proyectil, vendrá dado por:

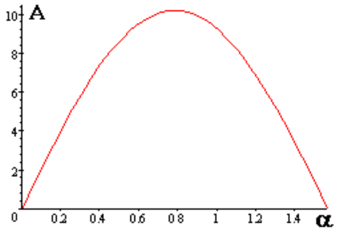
$$A = 2\frac{v_{\circ x} v_{\circ y}}{g}$$

Que en términos del ángulo con el que se efectúa el lanzamiento, nos queda.

$$A = 2\frac{v_\circ^2 \operatorname{sen}(\alpha)\cos(\alpha)}{g}$$

Resultando para la altura máxima y alcance de un proyectil, gráficas en función del ángulo de lanzamiento, como las que se muestran a continuación, para una velocidad inicial de 10 m/s y para un rango entre 0 y π/2.





Teniendo en cuenta la expresión obtenida para el alcance del proyectil en función del ángulo con el que se efectúa el lanzamiento y mediante una sustitución trigonométrica, esta magnitud puede expresarse como:

$$A = \frac{v_\circ^2}{g}\,\text{sen}(2\alpha)$$

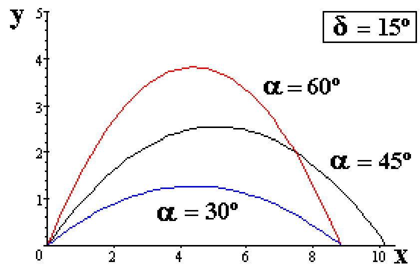
Resultando que, para una determinada velocidad inicial, el alcance del proyectil será máximo cuando el argumento de la función anterior sea tal que:

$$2\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \therefore \quad \alpha = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \quad \alpha = 0{,}785$$

Con lo que dicha magnitud vendrá dada por:

$$A_m = \frac{v_\circ^2}{g}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, resulta que si se mantiene constante la velocidad del lanzamiento disparos con ángulos menores o mayores que 45^0 darán lugar a un alcance inferior al indicado anteriormente, en el primer caso a lo largo de una trayectoria con una altura máxima inferior, tiro rasante (trazo azul en la figura lateral) y en el otro caso a lo largo de una trayectoria con una altura máxima superior a la lograda con el disparo a 45^0, tiro por elevación (trazo rojo en la figura).



$$\text{sen}\,2(\alpha + \delta) = \text{sen}\,2(\alpha - \delta)$$

Donde además se muestra que si los ángulos de disparo difieren en la misma cantidad (δ) del ángulo de 45^0, los alcances serán claramente coincidentes ya que en dichos casos:

Parábola de Seguridad.

Supongamos ahora que deseamos obtener una expresión para el ángulo con que deberíamos lanzar un proyectil, si deseamos que el mismo alcance un punto del espacio con coordenadas (xy), en cuyo caso, teniendo en cuenta la ecuación obtenida para la trayectoria, este ángulo deberá ser tal que:

$$y = x\,\text{tg}(\alpha) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_\circ^2\cos^2(\alpha)}x^2$$

Que teniendo en cuenta la identidad trigonométrica:

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{1 + \text{tg}^2(\alpha)}$$

Puede expresarse como:

$$y = x\,\text{tg}(\alpha) - \frac{1}{2}\frac{g}{v_\circ^2}\left[1 + \text{tg}^2(\alpha)\right]x^2$$

Donde recordemos que (xy) son las coordenadas del punto que deseamos alcanzar, por lo que la anterior debe interpretarse como una ecuación de segundo grado en (tgα), con lo que, el ángulo con que deberemos lanzar el proyectil deberá ser tal que.

$$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{v_\circ^2}{xg} \pm \frac{1}{x}\sqrt{\frac{v_\circ^4}{g^2} - x^2 - 2\frac{yv_\circ^2}{g}}$$

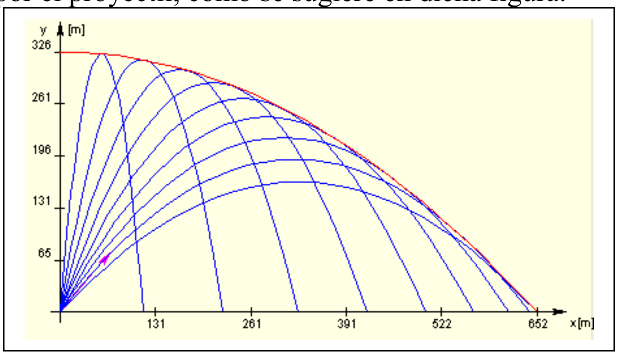
Existiendo por lo tanto dos valores de la coordenada angular con los que podemos alcanzar el punto de interés, que corresponderán a un tiro rasante y otro por elevación. Sin embargo para que esto sea posible será necesario que el radicando sea positivo ya que de lo contrario obtendríamos como solución valores imaginarios que indudablemente carecen de significado físico, con lo que, para una determinada velocidad inicial solamente podrán ser alcanzados puntos con coordenadas (xy), tales que:

$$\frac{v_\circ^4}{g^2} - x^2 - 2\frac{yv_\circ^2}{g} \geq 0$$

Relación que nos define una zona del espacio alcanzable por el proyectil y otra inalcanzable por el mismo, delimitadas por la función:

$$y = \frac{v_\circ^2}{2g} - \frac{1}{2}\frac{g}{v_\circ^2}x^2$$

Cuya gráfica cualitativa se muestra, con trazo rojo, en la figura siguiente, que corresponde a una parábola, a la que conocemos como parábola de seguridad, resultando que los puntos por encima de la misma serán inalcanzables por el proyectil, como se sugiere en dicha figura.



Laboratorio Virtual IV.
Tiro Oblicuo de Corto Alcance.

Ejecutando el archivo **Oblicuo.htm** incluido en la carpeta del mismo nombre, podrá acceder a una simulación que le permitirá realizar lanzamientos de proyectiles con diferentes condiciones iniciales y observar, la trayectoria a lo largo de la que se desplaza el proyectil, las variaciones temporales en las componentes de su vector velocidad y determinar el tiempo de vuelo mediante el cronómetro que la simulación ofrece en el vértice superior izquierdo.

Con dicha simulación deberá realizar por lo menos **tres** lanzamientos desde el origen con diferentes velocidades iniciales y en cada caso, determinar el tiempo de vuelo del proyectil para obtener a partir de dicha medición, la velocidad de cada lanzamiento y la máxima altura alcanzada por el mismo, teniendo en cuenta que para la situación en consideración.

$$t_v = 2\frac{V_{\circ y}}{g} \qquad A = 2\frac{V_{\circ x}V_{\circ y}}{g} \qquad y_m = \frac{V_{\circ y}^2}{2g}$$

Con el propósito de mejorar la calidad de los resultados y para cada lanzamiento, se recomienda determinar por lo menos, **cinco** valores del tiempo de vuelo y con ellos un promedio de dicha magnitud, para emplearlo en los cálculos solicitados.

Finalmente cabe destacar que al final, la página ofrece una nueva simulación destinada a ilustrar aspectos relacionados con tiros rasantes, por elevación y parábola de seguridad.