

ELECTROMAGNETISMO II
Guía 6: Cinemática y Dinámica Relativista

El día de entrega de esta guía es el 12/06. Se deben entregar resueltos todos los problemas pares o todos los impares.

Temas correspondientes a clases 15 y 16.

1. Dos eventos ocurren en el mismo lugar y separados por 3 segundos en el sistema de referencia inercial del laboratorio.
 - a) ¿Cuál es la distancia espacial entre dichos eventos según un observador en un cohete, para el cual los dos eventos ocurren uno 5 segundos después del otro?. Suponer que el cohete viaja con velocidad constante respecto al laboratorio.
 - b) ¿Cuál es la velocidad relativa entre los sistemas de referencia cohete y laboratorio?

2. Considere un sistema de referencia inercial S (laboratorio) de origen O y otro sistema inercial S' de ejes paralelos al anterior fijo a un cohete, cuyo origen O' se desplaza con velocidad $v\hat{x}$ respecto de O , de modo que $O = O'$ en $t = 0 = t'$. Una varilla se encuentra en reposo en el cohete, donde mide L_0 (longitud propia).
 - a) Si la varilla está alineada con el eje x , ¿cuánto medirá para un observador en el laboratorio?.
 - b) ¿Cómo se verá la varilla móvil desde el laboratorio si en el cohete estuviese apoyada formando un ángulo α' con la dirección $O'x'$?. En particular, analizar el caso $\alpha' = \pi/2$.
 - c) Considere una partícula con velocidad \mathbf{v}' respecto al cohete, la cual forma un ángulo α' con el eje x' . ¿Cuál es la velocidad de la partícula medida en el laboratorio?.

3. Un cohete lleva un reloj en su interior con el cual encuentra que el tiempo transcurrido entre dos sucesos es T_0 .
 - a) ¿Cuál es el tiempo transcurrido para un observador en el laboratorio?
 - b) ¿Qué pasaría si el reloj que mide T_0 ahora estuviese en el laboratorio?. ¿Cómo se verifica la simetría entre el sistema del laboratorio y el del cohete requerida por el principio de relatividad?.

4. Un estudiante piensa que la relatividad debe estar equivocada. Porque, afirma él, supongamos que un automóvil, de 4 metros de longitud propia y que se mueve con velocidad v relativista, entra en un garage de 2 metros de largo, con una puerta delantera y otra trasera, de modo tal que antes de que el auto entre la puerta delantera estaba abierta y la trasera cerrada, y tan pronto el auto termina de entrar, la puerta delantera se cierra y la trasera se abre (simultáneamente) para dejar salir el auto. Según se ven las cosas desde el garage, si $1 - \beta^2 \ll 1/4$, el auto mide a lo sumo 2 metros (debido a la contracción de Lorentz) y luego el auto podrá atravesar el garage sin chocar con las puertas de éste, siempre que se abra una al mismo tiempo que se cierra la otra. Pero

para el conductor del auto, éste mide 4 metros y el garage a lo sumo 1 metro.

¿Cómo puede caber un auto de 4 metros en un garage de 1 metro de largo o menos?.

¿Chocará el auto contra alguna de las puertas? Explique la aparente contradicción y para clarificar mejor el problema haga el correspondiente diagrama de espacio-tiempo (Dibuje las líneas de universo de los extremos del auto y de las puertas del garage).

5. Halle las fórmulas de transformación de Lorentz entre 2 sistemas inerciales S y S' tal que la velocidad \mathbf{V} del origen O' de S' respecto a S , forma un ángulo de 45° con Ox (y está en el plano Oxy). Suponga $Ox \parallel O'x'$ y $Oy \parallel O'y'$. Muestre que el resultado es diferente al que se obtiene haciendo dos transformaciones de Lorentz sucesivas, una con $\mathbf{V}_1 = V\sqrt{2}/2\hat{x}$ y otra con $\mathbf{V}_2 = V\sqrt{2}/2\hat{y}$.

6. Desde un cohete que viaja con velocidad \mathbf{v} respecto al laboratorio, se emiten señales luminosas de frecuencia ν_0 medida en el cohete.

Si \mathbf{v} es paralela al eje x , determinar la frecuencia ν con que se recibe en cualquier punto del plano (x, y) del laboratorio la luz emitida por el cohete (“*efecto Doppler*”). Para ello:

- a) Haga el cálculo suponiendo que la luz consta de pulsos emitidos periódicamente desde el cohete con período $\tau_0 = 1/\nu_0$. Entonces $\nu = 1/\tau$, donde τ es el tiempo entre la recepción de dos pulsos consecutivos en un punto dado del laboratorio. Calcule directamente, y usando diagramas de espacio-tiempo.

Hint: para $\gamma = 1$ se obtiene el efecto Doppler clásico, válido para ondas de sonido (que por ejemplo explica el cambio del tono de la bocina de un auto cuando pasa al lado del observador).

- b) Reduzca el resultado asumiendo que la luz está formada por fotones: partículas con masa en reposo nula y energía $E = h\nu$ que viajan a la velocidad de la luz c (¿cuál es su impulso?).

Hint: en general se introduce también una longitud de onda para caracterizar al fotón: λ , tal que $c = \lambda\nu$, y el vector de propagación $\mathbf{k} = \mathbf{p}/h$, $|\mathbf{k}| = k = 1/\lambda$.

7. Una partícula de masa en reposo m y energía cinética T choca elásticamente con una partícula idéntica inicialmente en reposo.

Calcule el ángulo entre las velocidades finales de las partículas, suponiendo que la colisión elástica es simétrica (es decir, las partículas salen con energías iguales, y velocidades formando ángulos iguales con la dirección de propagación del proyectil).

Obtenga como límites:

- a) El resultado clásico para la colisión elástica a bajas velocidades (energía cinética incidente \ll masa en reposo de las partículas);

- b) El resultado ultra-relativista (obtenido para alta velocidad del proyectil, cercana a la de la luz). Aplique esto para mostrar que un fotón no puede desintegrarse en otros dos fotones que viajen en direcciones distintas a la inicial

8. Una partícula libre de masa en reposo m_1 , inicialmente en reposo, es chocada por una partícula de masa en reposo m_2 y energía cinética T . Como resultado de la colisión (perfectamente inelástica) las partículas quedan pegadas.

- a) ¿Cuánto vale la masa en reposo M de la partícula producto de la colisión?
- b) ¿Bajo qué condiciones resultará $M = m_1 + m_2$, como indicaría el principio newtoniano de conservación de la masa?. ¿A qué se debe la diferencia?
9. (a) Para un sistema de partículas puede definirse el referencial *centro de momentos* o *centro de masas* (CM) como aquél en que el impulso total del sistema es nulo. Halle la velocidad del CM de un sistema de N partículas de masas en reposo m_i , impulsos \mathbf{p}_i y energías w_i ($i = 1, N$) respecto al laboratorio.
¿Cómo se relacionan la energía total del sistema en el CM con la energía e impulso total del sistema en el laboratorio?
- (b) Considere la siguiente reacción producida por primera vez en 1955 en el acelerador de partículas de Berkeley: $p + p \longrightarrow p + p + (p + p^-)$. En dicha reacción un protón de alta energía choca contra otro en reposo, produciendo otros 2 protones más un par protón-antiprotón (de igual masa que el protón pero carga opuesta).
Determine cuál es la mínima energía cinética que debe tener el proyectil para que dicha reacción pueda ocurrir (*umbral de energía para la reacción*), y cuál es la energía final de cada partícula.
Hint: para determinar el umbral de energía le conviene analizar la reacción en el referencial CM, y luego interpretar a qué corresponde en el laboratorio.
10. (i) Muestre que la reacción: $\gamma \longrightarrow e + e^+$, en que un rayo gama (compuesto de fotones de alta energía) crea un par electrón-positrón (de igual masa que el electrón pero carga opuesta), no es posible (aunque el fotón tuviese energía mayor a la suma de las masas en reposo del par).
(ii) En cambio es posible fotoproducir un par electrón-positrón con 2 fotones de distintas energías. Analice el umbral de energía para esta reacción (y determine la relación entre las energías incidentes y el ángulo entre las direcciones de los fotones para que ocurra la reacción).
11. Si un fotón de energía $E = h\nu = hc/\lambda$ choca con un electrón en reposo y es difundido elásticamente por él en un ángulo θ , la frecuencia del fotón se modifica pasando a $\nu' = c/\lambda'$ (*efecto Compton*).
Muestre que: $\lambda' - \lambda = \frac{2h}{mc} \text{sen}^2(\theta/2)$. Encuentre la energía e impulso comunicados al electrón.