Mecánica del Continuo

2016

Elasticidad: Parte 1

1) Demuestre el balance de energía:

$$\dot{\overline{\int_P \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}:\mathbb{C}\boldsymbol{E}+\rho|\dot{\boldsymbol{u}}|^2)dv}} = \int_{\partial P} \boldsymbol{Tn}.\dot{\boldsymbol{u}}da + \int_P \boldsymbol{b_0}.\dot{\boldsymbol{u}}\,dv$$

Para una sub-región P del sólido.
a- Si $\boldsymbol{b_0} = \boldsymbol{0}$ y $\boldsymbol{Tn} = \boldsymbol{0}$ en una porción de ∂B y $\dot{\boldsymbol{u}} = \boldsymbol{0}$ en el resto de ∂B, demuestre que:

$$\dot{\overline{\int_P \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}:\mathbb{C}\boldsymbol{E}+\rho|\dot{\boldsymbol{u}}|^2)dv}} = 0$$

la energía se conserva.
b-Adicionalmente, si $\boldsymbol{u}$ y $\dot{\boldsymbol{u}}$ se anulan en B para algún tiempo, entonces, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ para todo tiempo.
c- Muestre que una consecuencia de la simetría del tensor $\mathbb{C}$, es

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}:\mathbb{C}\boldsymbol{E}\right)}{\partial\boldsymbol{E}}$$

Utilice la relación anterior para demostrar:

$$\dot{\psi}_R = \boldsymbol{T}:\dot{\boldsymbol{E}}$$

Donde ψ_R es la energía libre.

2) Muestre que para un sólido lineal isotrópico, la ecuación de equilibrio estático, implica el balance de trabajo y energía.

$$\int_{\partial P} \boldsymbol{Tn}.\boldsymbol{u}da + \int_P \boldsymbol{b_0}.\boldsymbol{u}dv = \int_P \boldsymbol{E}:\mathbb{C}\boldsymbol{E}dv$$

3) Considere un material isotrópico, sobre el cual no actúan fuerzas volumétricas. Sí

$$\vartheta = Div\boldsymbol{u}$$
$$\omega = Curl\boldsymbol{u}$$

Muestre que $\ddot{\vartheta} = V_1\Delta\vartheta$ y $\ddot{\omega} = V_2\Delta\omega$
donde $V_1 = \sqrt{\frac{2\mu+\lambda}{\rho}}$ y $V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

Discuta la interpretación física de las ecuaciones anteriores.

4) Bajo la condición de equilibrio, muestre que las ecuaciones deducidas en el problema anterior, se reducen a la expresión:

$\Delta\vartheta = 0$ y $\Delta\omega = 0$

es decir, son funciones armónicas. Por lo tanto probar que el campo de desplazamiento $\boldsymbol{u}$ es una función biarmónica:

$$\Delta\Delta\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

de manera equivalente:

$$\frac{\partial^4 u_i}{\partial X_j \partial X_j \partial X_k \partial X_k} = 0$$

5) Derive la expresión:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{2\mu}\left(\boldsymbol{T} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}(tr\boldsymbol{T})\right)\boldsymbol{1}$$

6) Muestre que los módulos (μ, λ, c) y las constante cúbicas, (C_{11}, C_{12}, C_{44}), verifican las siguientes relaciones:

$$\mu = C_{44}$$
$$\lambda = C_{12}$$
$$c = C_{11} - C_{12} - 2C_{44}$$

¿qué propiedades elásticas tiene el material ?

7) Considere un cristal cúbico, Muestre que:

$$Div\boldsymbol{T} = Div\boldsymbol{T}^{iso} + Div\boldsymbol{T}^{cub}$$

donde:

$$Div\boldsymbol{T}^{iso} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\nabla Div\boldsymbol{u}$$

$$[Div\,\boldsymbol{T}^{cub}] = c\begin{bmatrix} u_{1,11} \\ u_{2,22} \\ u_{3,33} \end{bmatrix}$$

Muestre que la ecuación de movimiento para el desplazamiento de un cristal cúbico, es:

$$\rho\ddot{\boldsymbol{u}} = \mu\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\nabla Div\boldsymbol{u} + Div\boldsymbol{T}^{cub} + \boldsymbol{b}_0$$