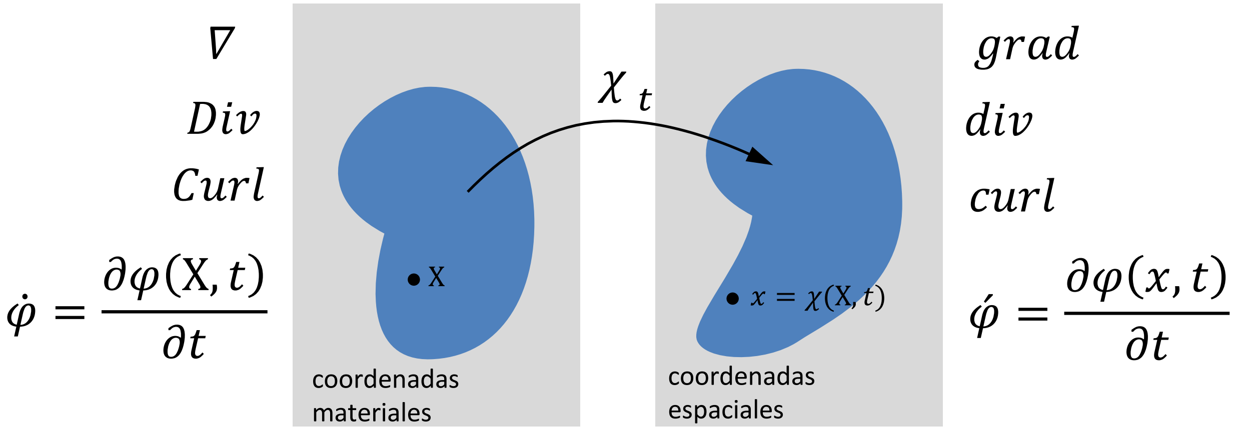
Mecánica del Continuo

2016

Cinemática: parte 3



1) Muestre que:

a- $grad\dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}$
b-$grad\boldsymbol{v}^{(n)} = \nabla^{(n+1)}\chi\boldsymbol{F}^{-1}$ donde $\boldsymbol{v}^{(n+1)}$ representa la derivada material de la velocidad $\boldsymbol{v}$ de orden n.

2) Muestre que:

a- $div\dot{\boldsymbol{g}} = \overline{div\boldsymbol{g}}^{\boldsymbol{\cdot}} + \boldsymbol{L}^T : grad\boldsymbol{g}$ donde $\boldsymbol{g}$ es un vector definido en coordenadas espaciales.
b- $grad\ \dot{\boldsymbol{v}} = \dot{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{L}^2$

3) Sea un campo de velocidades rígido:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{y},t) + \boldsymbol{\lambda}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

a- Muestre que el movimiento asociado también es rígido.
b- Probar que el campo de aceleraciones de un movimiento rígido es:

$$\dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x},t) = \dot{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{y},t) + \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\omega}(t) \times [\omega(t) \times (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})]$$

4) Exprese $\boldsymbol{D}$ y $\boldsymbol{W}$ en términos del tensor $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{V}\boldsymbol{R}$

5) Utilice la descomposición espectral del tensor $\boldsymbol{U} = \sum_1^3 \lambda_i \boldsymbol{r}_i \otimes \boldsymbol{r}_i$, para probar que:

$$skw(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1}) = skw\left(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{3}} \dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} \otimes \boldsymbol{r}_i + \sum_{\boldsymbol{i,j=1}}^{\boldsymbol{3}} \frac{\boldsymbol{\lambda_i}}{\boldsymbol{\lambda_j}} (\dot{\boldsymbol{r}}_{\boldsymbol{i}} . \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}}) \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{i}} \otimes \boldsymbol{r}_{\boldsymbol{j}}\right)$$

6) El tensor

$$\boldsymbol{A}_n(x,t) = \left.\frac{\partial^n \boldsymbol{C}_{(t)}(x,\tau)}{\partial \tau^n}\right|_{\tau=t} \quad n = 1,2,\ldots$$

Se denomina tensor Rivlin-Ericksen, para dicho tensor mostrar que:

a- $\boldsymbol{A}_1 = 2\boldsymbol{D}$

b- $\boldsymbol{C}^{(\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{F}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{F}$

c-$\boldsymbol{A}_{n+1} = \boldsymbol{A}_n + \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{A}_n$

d- $\boldsymbol{A}_n = {\boldsymbol{A}_n}^T$

7) Sea $\boldsymbol{L} = \dot{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{F}^{-1}$ y $\boldsymbol{D} = sym\ \boldsymbol{L}$, se cumple que**:**

$$\boldsymbol{F}^{-T}\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^{-1} = 2\boldsymbol{D}$$

a- y por lo tanto un movimiento es isocórico si y solo si:

$$tr\left(\boldsymbol{F}^{-T}\dot{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{F}^{-1}\right) = 0$$

b- o desde $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{R}\left[sym\left(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1}\right)\right]\boldsymbol{R}^T$, si y solo si:

$tr\left(\dot{\boldsymbol{U}}\boldsymbol{U}^{-1}\right)$=0

8) Muestre que:

$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{C} = 2(\boldsymbol{F}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^T):\boldsymbol{D}$

9) Sea el vector vorticidad $\boldsymbol{\omega} = curl\boldsymbol{v}$ y el tensor de spin $\boldsymbol{W} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\times$, mostrar que:

$$|\boldsymbol{\omega}|^2 = 2|\boldsymbol{W}|^2$$

10) Un movimiento es un *corte simple*, si el campo de velocidades tiene la forma $v(x,t) = v_1(x_2)\boldsymbol{e}_1$ en algún sistema cartesiano de coordenadas. Probar que para un corte simple:

a- $div\boldsymbol{v}$*=0*

b- $(grad\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}$*=**0***

c- $\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}'$