Guía n° 2: **Ley de Gauss – Método de las Imágenes**

Problema 1

Un cascarón esférico de radio R tiene una densidad superficial de carga σ

a) A partir de la ley de Coulomb, determine el campo eléctrico en función de r, para el campo eléctrico creado por la distribución de cargas, válidas para puntos interiores y exteriores de la esfera mencionada.

b) Obtener una expresión válida para el campo eléctrico correspondiente a puntos pertenecientes a la superficie.

c) A partir de la ley de Gauss, determine el campo eléctrico en función de r, para el campo eléctrico creado por la distribución de cargas, válidas para puntos interiores y exteriores de la esfera mencionada.

d) Realizar una gráfica cuanlitativa de E_r en función de r.

Problema 2

Dado un campo eléctrico uniforme de intensidad $E = 6.2 \times 10^5$ $[N/C]$ y una superficie plana con un área de 3.2 m^2 que puede orientarse de distintas formas, calcular el flujo a través del área cuándo la dirección del campo eléctrico es:

a) Perpendicular a la superficie.

b) Paralela a la superficie.

c) Forma un ángulo de 75° con el plano de la superficie.

Problema 3

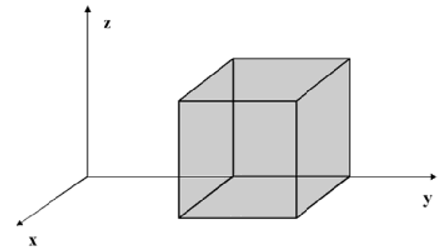
Suponiendo que una carga positiva está **uniformemente distribuida en un volumen esférico** de radio R, siendo ρ la carga por unidad de volumen.

a) Por medio del Teorema de Gauss obtener una expresión para el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera y grafícarlo como función de la distancia al centro de la esfera (r).

b) Obtener el potencial dentro y fuera de la esfera y grafícarlo como función de r.

Problema 4

Un campo eléctrico del tipo $\mathbf{E}(x,y,z) = a\sqrt{x}\ \breve{i} + a\sqrt{y}\ \breve{j} + a\sqrt{z}\ \breve{k}$ con $a = 800\ N/C.m^{1/2}$ intersecta una de las caras de un cubo de 10 cm de arista ubicado como se muestra la figura, donde sobre el eje y las caras cortan en $y = b$ e $y = b + 10\ cm$. Calcular:



a) El flujo neto que pasa por el cubo.

b) La carga dentro del cubo.

Problema 5

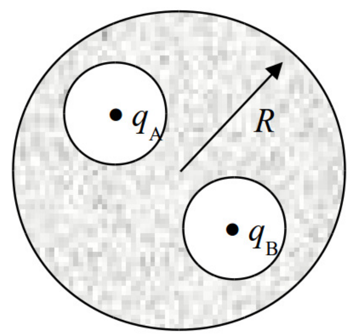
Suponiendo que una distribución de carga esférica de forma $\rho(r) = A/r$ para $r \leq R$ y 0 para $r > R$.

a) Por medio del Teorema de Gauss obtener una expresión para el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera y graficarlo como función de la distancia al centro de la esfera (r).

b) Obtener el potencial dentro y fuera de la esfera y grafícarlo como función de r.

Problema 6

En un conductor esférico neutro de radio R se efectúan dos cavidades esféricas de radios a y b como indica la figura. En el centro de cada cavidad se coloca una carga puntual q_A y q_B.



a) Encontrar las cargas superficiales σ_A y σ_B.

b) ¿Cuál es el campo fuera del conductor esférico?

c) ¿Cuál es el campo dentro de cada cavidad?

d) ¿Cuál es el campo en el interior del conductor? (zona gris).

Problema 7

De una superficie esférica salen líneas de fuerza radialmente y sobre ella tienen **una densidad constante**. ¿Cuáles son las posibles distribuciones de carga en su interior?.

Problema 8

¿Por qué no es práctico usar la ley de Gauss para encontrar el campo eléctrico en un punto que está a una distancia b de una barra cargada cuya longitud es L, a menos que $L \gg b$?

Problema 9

Considerar un dipolo eléctrico en el límite $l \ll r$ y mostrar que el flujo a través de una superficie Gaussiana esférica es cero (lo cual es consistente con el hecho que la carga encerrada por la superficie Gaussiana es cero también).

Problema 10

a) Si V es cero en un punto, también $\mathbf{E}$ debe ser cero en el punto?. Justificar y dar ejemplos.

b) ¿Qué puede decirse respecto a $\mathbf{E}$ en una región donde V es constante?

c) ¿Se tiene una carga neta positiva encerrada dentro de una superficie Gaussiana, significa que el campo eléctrico esta dirigido hacia afuera de la superficie en todos los puntos? Justificar la respuesta.

Problema 11

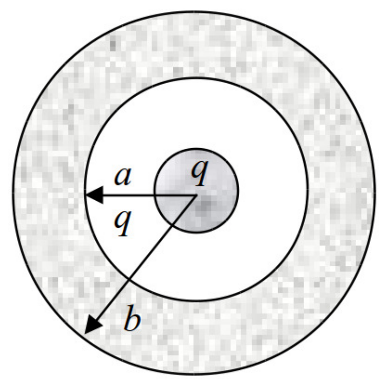
La carga máxima que puede ser retenida por uno de los bornes esféricos de un generador de Van der Graaff es alrededor de 10^{-3} C. Suponiendo una carga positiva con este valor y distribuída uniformemente sobre la superficie de una esfera que se encuentra en el vacío:

a) Calcular el valor del campo eléctrico en un punto exterior a la esfera y situado a 5 m de su centro.

b) Si se abandonara un electrón en este punto, ¿cuál sería el valor y la dirección de su aceleración inicial?

Problema 12

Una esfera metálica de radio R y carga q está rodeada por una capa metálica neutra de radio interior a y radio exterior b.



a) Encontrar la densidad superficial de carga σ en las superficies de radio R, a y b.

b) Calcular y graficar el campo eléctrico en las distintas regiones.

c) Calcular y graficar el potencial en las distintas regiones.

d) Repetir los incisos anteriores si ahora la superficie exterior es tocada con un cable puesto a tierra que baja su potencial a cero.

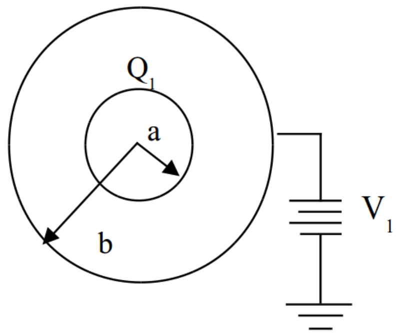
Problema 13

Un conductor esférico de radio a con carga Q_1 se encuentra en el interior de una esfera conductora hueca de radio b, tal como se indica en la figura. La esfera de radio mayor se encuentra a un potencial V_1 gracias a una batería.

a) Calcular la carga total sobre la superficie exterior de la esfera hueca y sobre la superficie interior.

b) Hallar la expresión del campo y el potencial a una distancia r del centro de las esferas, siendo $r < a$, $a < r < b$ y finalmente $r > b$.

c) Graficar $V(r)$ y $E_r(r)$.

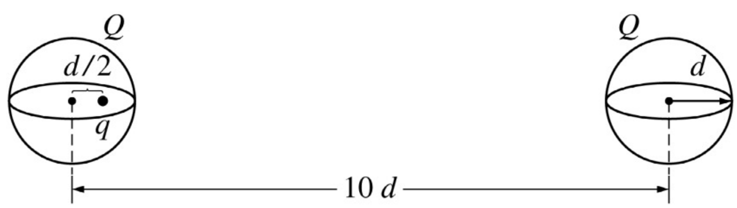


Problema 14

Dos cascarones esféricos no conductores, de radio d y muy delgados, tienen cada uno una carga Q distribuida uniformemente y se ubican de forma que sus centros queden separados una distancia 10 d. Se coloca una carga puntual positiva de magnitud q a una distancia $d/2$ del centro de uno de los cascarones, tal como se indica en la figura.

a) ¿Cuál es la fuerza neta sobre la carga q?

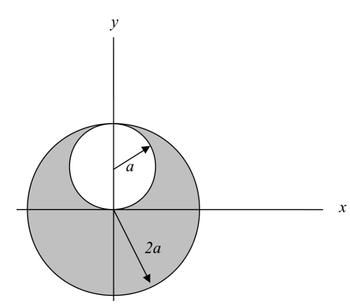
b) ¿Cuál hubiera sido la fuerza neta sobre la carga q si la carga Q a la izquierda hubiera estado distribuída de modo que ρ fuera constante?



Ayuda: utilice principio de superposición.

Problema 15

Una esfera de radio $2a$ está hecha de un material no conductor con una densidad de carga volumétrica uniforme ρ. Se efectúa una cavidad de radio a en la esfera, como se muestra en la figura. Demuestre que el campo eléctrico dentro de la cavidad es uniforme y está dado por $E_x = 0$ y $E_y = \rho a/(3\epsilon_0)$. *Sugerencia*: el campo en el interior de la cavidad es la superposición del campo eléctrico debido a la esfera original sin la perforación más el campo debido a unas esfera del tamaño de la cavidad con una densidad de carga uniforme $-\rho$



Problema 16

La región interior a un largo cilindro de radio R m se carga con una densidad $\rho = \rho_0(1 - r/R)$ C/m^3, donde ρ_0 es una constante positiva, siendo r la distancia medida desde el eje del cilindro. Encontrar a qué distancia del eje el campo eléctrico es máximo y calcule esta magnitud máxima. Grafique $\mathbf{E}(r)$ y $V(r)$.

Problema 17

Una carga puntual q se sitúa a una distancia d de un plano conductor, puesto a tierra, de extensión infinita.

a) Obtenga la densidad de carga inducida en el plano.

b) Obtenga la carga total inducida sobre el plano por integración directa de la densidad de carga superficial.

Problema 18

Una carga puntual q se encuentra entre dos planos paralelos, puestos a tierra y separados entre sí una distancia d. Encuentre las posiciones del número infinito de cargas imagen. Exprese la fuerza sobre la carga q por una serie infinita.

Problema 19

Considere una carga puntual a una distancia d de una esfera conductora con $V = 0$ como muestra la figura.

a) Dibuje en forma cualitativa las líneas de Faraday para el sistema basándose en las propiedades de un conductor.

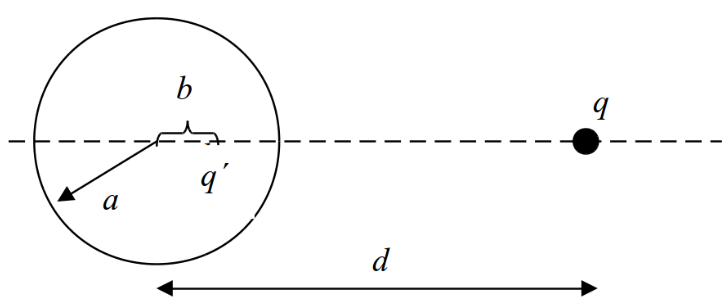
b) Obtenga una expresión para $V(r)$ $(r > a)$

c) Encuentre la densidad de carga inducida q' sobre la superficie como función de θ.

d) Integre dicha densidad para obtener la carga total inducida q'.

e) Calcule la magnitud de la fuerza atractiva entre la esfera y la carga.

f) Verifique que las líneas de fuerza Faraday calculadas concuerdan con lo esperado de acuerdo al inciso *a*).



Problema 20

¿Qué pasaría si la esfera del problema anterior estuviera puesta a un potencial V_0 en vez de tierra?. Dónde ubicaría una segunda carga imagen y como quedaría la expresión para $V(r)$ en este caso? Repetir los incisos *c*) y *d*) del ejercicio anterior.

Problema 21

Explore que pasaría si en el problema 18) se hubiera puesto un conductor de forma cúbica en vez de esférica. Hubiera sido posible ubicar en algún lugar dentro del cubo una carga imagen q' que hubiera hecho $V = 0$ sobre toda la superficie del conductor? ¿Qué se puede concluir?

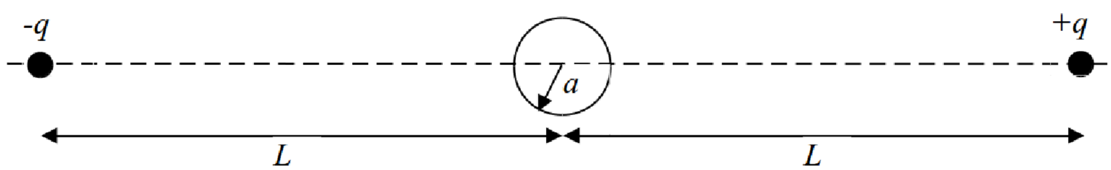
Problema 22

Considerar el caso de una esfera conductora *descargada* de radio a ubicada un campo eléctrico uniforme de magnitud E_0

a) Teniendo en cuenta las propiedades de los conductores, dibujar las líneas de fuerza y la distribución de cargas inducidas en la superficie.

b) Resuelva el problema por el método de carga-imagen.(*Ayuda*: generar el campo eléctrico uniforme utilizando un dipolo eléctrico separado a grandes distancias, como se muestra en la figura. El problema se torna similar al 17). Notar que en el límite deseado se puede utilizar la relación $(1+x)^{-1/2} \approx 1 - x/2$.)

c) Dado que resolviendo el problema mediante la ecuación de Laplace[1] el potencial da $V(r,\theta) = V_0 - E_0 r\cos(\theta) + E_0 a^3 r^{-2}\cos(\theta)$ donde V_0 es el potencial en la superfície de la esfera, obtener la expresión para el vector campo eléctrico $\mathbf{E}$, calcular la densidad superficial de carga en función del ángulo θ, $\sigma(\theta)$, y verificar que la carga total sobre la esfera es cero.



[1]Para un tratamiento basado en la resolución de la ecuación de Laplace consultar la sección 3.5 del libro de Reitz-Milford