

4.01 CANTIDAD DE MOVIMIENTO Y MOMENTO ANGULAR.

Vector Cantidad de Movimiento.

Considerando una partícula que se desplaza respecto de un sistema de referencia (xyz) con una determinada velocidad, definiremos su vector cantidad de movimiento, respecto del mencionado sistema de referencia, como:

$$\vec{p}_{xyz} = m\vec{v}_{xyz} \quad 4.01$$

Que obviamente resulta ser un vector paralelo al vector velocidad y por lo tanto tangente a la trayectoria de la partícula, cuyo sentido coincidirá en todo momento con el sentido de su movimiento.

Suponiendo constante la masa de la partícula, e inercial al sistema de referencia involucrado, es claro entonces que la ecuación de Newton puede expresarse en términos del vector cantidad de movimiento como:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad 4.02$$

Vector Momento Angular.

Considerando una partícula cuya cantidad de movimiento respecto de un sistema de referencia (xyz) fuera el indicado en la figura siguiente, definiremos el momento de dicha magnitud respecto del origen del mencionado sistema, como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}_{xyz} \quad 4.03$$

Que en adelante identificaremos como vector momento angular de la partícula respecto del origen del sistema en consideración, que por lo tanto, resulta ser, en cada instante, un vector perpendicular al plano que definen los vectores posición y velocidad, o sea, perpendicular al plano del movimiento como se sugiere en la figura siguiente.

Cuyo módulo, en términos del ángulo (α) entre el vector posición y el vector velocidad, que se indica en la figura lateral, vendrá expresado por:

$$L = rmv \sin \alpha$$

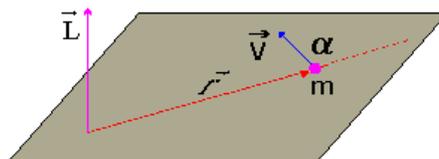
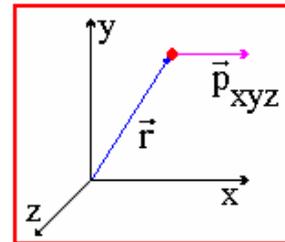
Suponiendo ahora que durante el intervalo de tiempo de interés, la partícula se mueve a lo largo de una trayectoria plana y orientando los ejes de un sistema cartesiano de manera que el plano (xy) coincida con el plano del movimiento y evaluando los vectores posición y velocidad en componentes según dichas direcciones, es inmediato que la única componente no nula del vector momento angular vendrá dada por:

$$L_z = m(xy\dot{y} - y\dot{x})$$

Si para una situación como la que estamos considerando, el vector posición y velocidad de la partícula fueran expresados en componentes polares, empleando como centro de dicho sistema de coordenadas al punto respecto del cuál se determina el vector momento angular y teniendo en cuenta (4.04), al módulo del vector momento angular podremos expresarlo como:

$$L = m r v_{\theta}$$

Que en términos de la velocidad angular, calculada respecto del punto considerado, nos queda:



$$\mathbf{L} = m r^2 \dot{\theta} \quad 4.05$$

Definiendo el momento polar de inercia respecto del punto involucrado en el cálculo del vector momento angular, como:

$$\mathbf{I} = m r^2$$

Es claro entonces que al módulo del vector momento angular podremos expresarlo, en términos de esta magnitud, como:

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} \dot{\theta}$$

4.02 ECUACIÓN DE MOMENTOS.

En esta oportunidad buscaremos una expresión que nos relacione a la resultante de las fuerzas de interacción a la que está sometida una partícula con su vector momento angular, para lo cual determinaremos la derivada temporal de su vector momento angular, que teniendo en cuenta como ha sido definido, resulta:

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right]_{xyz} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right]_{xyz} \times \vec{p} + \vec{r} \times \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right]_{xyz}$$

Donde con el subíndice (xyz) identificamos el sistema desde el que se evalúan los cambios temporales de las magnitudes involucradas, con lo que el primer término del miembro de la derecha es nulo ya que incluye el producto vectorial de dos vectores paralelos y por lo tanto:

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right]_{xyz} = \vec{r} \times \left. \frac{d\vec{p}}{dt} \right]_{xyz}$$

Suponiendo ahora que el sistema (xyz) desde el que se calculan las variaciones temporales, es un sistema inercial, en cuyo caso es válida la ecuación (4.02), de la anterior obtenemos que:

$$\left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right]_{xyz} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Definiendo el momento que genera la resultante de las fuerzas de interacción a la que está sometida la partícula o el centro de masa de un cuerpo, respecto del origen del sistema de referencia inercial, como:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

De la anterior obtenemos que, las variaciones temporales del vector momento angular, calculadas desde un sistema de referencia inercial, estarán relacionadas con el momento que genera la resultante de las fuerzas de interacción, mediante:

$$\vec{M} = \left. \frac{d\vec{L}}{dt} \right]_{xyz} \quad 4.06$$

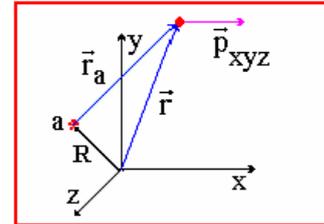
Que en adelante reconoceremos como ecuación de momentos, siendo importante remarcar que la validez de esta expresión requiere que el sistema de referencia desde el que se evalúa la derivada temporal del vector momento angular, sea un sistema de referencia inercial.

Considerando ahora un punto (a) cualquiera como el sugerido en la figura lateral, el momento angular respecto de dicho punto vendrá dado por:

$$\vec{L}_a = \vec{r}_a \times \vec{p}_{xyz}$$

De donde resulta que la derivada temporal del vector momento angular calculada desde un sistema inercial, o sea desde un sistema en el que es válida la ecuación (4.02), vendrá dada por:

$$\left. \frac{d\vec{L}_a}{dt} \right]_{xyz} = \left. \frac{d\vec{r}_a}{dt} \right]_{xyz} \times \vec{p}_{xyz} + \vec{r}_a \times \vec{F}$$



Puesto que al vector posición de la partícula respecto del punto (a) podemos expresarlo como:

$$\vec{r}_a = \vec{r} - \vec{R}$$

De la anterior resulta:

$$\left. \frac{d\vec{L}_a}{dt} \right]_{xyz} = (\vec{v}_{xyz} - \vec{v}_{A/xyz}) \times \vec{p}_{xyz} + \vec{r}_a \times \vec{F}$$

Teniendo en cuenta nuevamente que los vectores velocidad y cantidad de movimiento de la partícula son paralelos, y que el último término nos da el momento que la resultante de las fuerzas de interacción genera respecto del punto (a), de la anterior obtenemos que:

$$\vec{M}_a = \left. \frac{d\vec{L}_a}{dt} \right]_{xyz} + \vec{v}_{a/xyz} \times \vec{p}_{xyz}$$

De donde resulta que si el punto respecto del cual se calculan los momentos es un punto fijo al sistema inercial, como sería el origen de dicho sistema, entonces nuevamente:

$$\vec{M}_a = \left. \frac{d\vec{L}_a}{dt} \right]_{xyz}$$

Conservación del Vector Momento Angular.

Teniendo en cuenta las dos últimas relaciones obtenidas entre el momento que genera la resultante de las fuerzas de interacción a que se encuentra sometida una partícula y las variaciones temporales de su vector momento angular, resulta entonces que si el conjunto de fuerzas es tal que no generan momento respecto de un punto fijo a un sistema inercial, entonces el momento angular, calculado respecto de dicho punto, permanecerá constante e igual al valor que tenía en el instante inicial, que formalmente podemos expresar como.

$$\vec{M}_a = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L}_a = \text{cte} \quad \therefore \quad \vec{L} = \vec{L}_{0a}$$

Teniendo en cuenta que se trata de una magnitud vectorial, su conservación requiere que su dirección también permanezca constante y puesto que la misma es perpendicular al plano del movimiento, la trayectoria a lo largo de la que se desplazará la

partícula permanecerá contenida en el plano definido por sus vectores posición y velocidad en el instante inicial.

Puesto que bajo las condiciones indicadas, la partícula se desplazará a lo largo de una trayectoria plana, expresando el módulo del vector momento angular en coordenadas polares, su conservación nos garantiza que:

$$m r_a^2 \dot{\theta} = \text{cte}$$

Que en términos del momento angular inicial queda:

$$m r_a^2 \dot{\theta} = L_{oa}$$

Donde es importante tener en cuenta que la velocidad angular considerada en las anteriores está calculada respecto del punto involucrado en el teorema de conservación, esto es respecto del punto respecto del que se determina el vector momento angular y el momento nulo que generan las fuerzas de interacción.

Teniendo en cuenta que las conclusiones obtenidas son válidas cuando los momentos están calculados respecto de un punto fijo a un sistema de referencia inercial, es claro que tomando los momentos respecto del origen de un sistema de referencia inercial, al teorema relacionado con la conservación del vector momento angular respecto de dicho punto podremos expresarlo como:

$$\vec{M} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{cte} \quad \therefore \quad \vec{L} = \vec{L}_o \quad 4.07$$

Con lo que, la conservación del módulo de dicha magnitud nos garantiza que:

$$m r^2 \dot{\theta} = L_o \quad 4.08$$

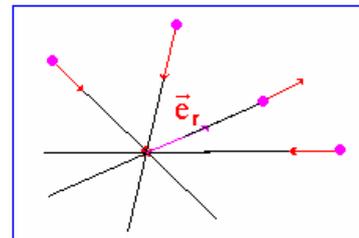
Y la velocidad angular de la partícula o centro de masa del cuerpo, variará con su coordenada radial según:

$$\dot{\theta} = \frac{L_o}{m r^2} \quad 4.09$$

4.03 MOVIMIENTO EN UN CAMPO DE FUERZA RADIAL ESFÉRICAMENTE SIMÉTRICO.

Diremos que una partícula está sometida a un campo de fuerza radial esféricamente simétrico, cuando la fuerza a que se ve sometida cumple con los requisitos que se indican a continuación:

- Su recta de acción está en todo momento dirigida a lo largo de rectas que se cortan en un punto fijo al sistema de referencia involucrado, como se sugiere en la figura siguiente, que en adelante identificaremos como centro de fuerza, pudiendo su sentido estar indistintamente dirigido hacia dicho punto o en sentido opuesto, fuerza atractiva o repulsiva respectivamente, en cuyo caso diremos que estamos en presencia de un *campo de fuerza radial*.



- Si además el módulo de la fuerza depende únicamente de la distancia (r) al mencionado centro de fuerza, diremos entonces que el campo de *fuerza es radial y esféricamente simétrico*.

Bajo estas condiciones es claro que la fuerza a que estará sometida la partícula podrá expresarse en términos del vector radial unitario y de su distancia (r) al centro de fuerzas, como:

$$\vec{F} = f(r) \vec{e}_r$$

En cuyo caso y como ya lo mencionáramos, reconoceremos a este tipo de fuerzas como radial esféricamente simétrica, en cuanto a que solamente cuenta con una componente radial y ésta *no* depende de ninguna coordenada angular y por lo tanto sus propiedades tendrán la simetría esférica que justifica su nominación.

Suponiendo dadas las condiciones enunciadas anteriormente es claro que el momento de una fuerza con estas características calculado respecto de su centro de fuerzas será nulo y por lo tanto el momento angular de una partícula sometida a una fuerza como la mencionada, calculado respecto del centro de fuerzas, permanecerá constante y se desplazará a lo largo de una trayectoria plana de manera que:

$$m r^2 \dot{\theta} = L_o \quad 4.10$$

Donde la coordenada radial y la velocidad angular están determinadas respecto del centro de fuerzas y donde con (L_o) identificamos al momento angular de la partícula respecto de dicho punto en el instante inicial, entendiendo por instante inicial al instante en el que la partícula queda sometida a un sistema de fuerzas tal que su resultante satisface las condiciones indicadas. Por lo tanto bajo estas condiciones, la velocidad angular vendrá expresada en función de su distancia al centro de fuerzas, por:

$$\dot{\theta} = \frac{L_o}{m r^2} \quad 4.11$$

Resultando que para una situación como la indicada, la componente radial de la ecuación de Newton quedará expresada como:

$$f(r) = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

A partir de la cual, y teniendo en cuenta (4.11), resulta:

$$\ddot{r} = \left(\frac{L_o}{m}\right)^2 \frac{1}{r^3} + \frac{f(r)}{m}$$

De donde, separando variables obtenemos:

$$r \dot{r} = \left(\frac{L_o}{m}\right)^2 \frac{1}{r^3} dr + \frac{f(r)}{m} dr$$

Que luego de integrar entre límites compatibles con las condiciones iniciales nos proporciona la relación:

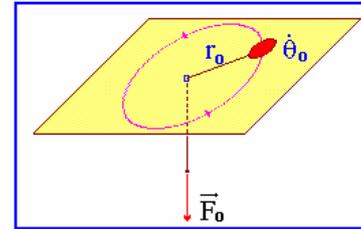
$$\dot{r}^2 = \dot{r}_o^2 + \left(\frac{L_o}{m}\right)^2 \left(\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{m} \int_{r_o}^r f(r) dr \quad 4.12$$

Que en términos del momento angular específico, o sea por unidad de masa, queda:

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_o^2 + l_o^2 \left(\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{2}{m} \int_{r_o}^r f(r) dr \quad 4.13$$

Aplicación.

La figura muestra una partícula de masa (m) que se mueve a lo largo de una trayectoria circular contenida en un plano horizontal libre de rozamiento, con una velocidad constante y conocida, mientras está sujeta por una cuerda inextensible y de masa despreciable que pasa por un orificio coincidente con el centro de la trayectoria.



En este caso es claro que la interacción entre el cuerpo y la cuerda deberá dar lugar a la fuerza que garantice la trayectoria circular, que por lo tanto y teniendo en cuenta la ecuación de Newton vendrá dada por:

$$F_o = mr_o \dot{\theta}_o^2$$

Suponiendo ahora que se aplica una fuerza (k) veces mayor que la indicada, es claro que se romperá el equilibrio dinámico establecido inicialmente y la partícula se desplazará a lo largo de una trayectoria del tipo helicoidal hacia el centro de la primitiva trayectoria circular.

Bajo estas condiciones, trataremos de obtener una expresión para la velocidad que tendrá la partícula cuando se encuentre a una distancia del orificio que sea la mitad de la inicial, para lo cual teniendo en cuenta que la fuerza a la que se verá sometida estará dirigida en todo momento hacia el orificio entonces su momento angular respecto del mencionado punto ha de permanecer constante y por lo tanto de (4.11) resulta que su velocidad angular, determinada respecto del orificio, en el instante en que alcance la coordenada radial mencionada, vendrá dada por:

$$\dot{\theta}_1 = \frac{L_o}{mr_1^2}$$

Donde:

$$r_1 = \frac{r_o}{2} \quad \text{y} \quad L_o = mr_o^2 \dot{\theta}_o$$

Con lo que de la anterior resulta que la velocidad angular de la partícula al pasar por el punto cuya coordenada radial es la mitad de la anterior, vendrá dada por:

$$\dot{\theta}_1 = 4\dot{\theta}_o$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la fuerza aplicada sobre la partícula fue en todo momento (k) veces la aplicada inicialmente, de (4.13) resulta:

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_o^2 + l_o^2 \left(\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2}{m} \int_{r_o}^r kmr_o \theta_o^2 dr$$

Puesto que en el instante inicial, la componente radial del vector velocidad es nula, de la anterior obtenemos que la componente radial del vector velocidad cuando pase por el punto cuya coordenada radial es la mitad de la inicial, vendrá dada por:

$$\dot{r}^2 = (k - 3) r_o^2 \dot{\theta}_o^2$$

Por lo tanto para poder llevar la partícula hasta una distancia que sea la mitad de la inicial será necesario aplicar una fuerza que sea por lo menos 3 veces mayor que la

aplicada inicialmente para mantener la partícula a lo largo de la primitiva trayectoria circular.

Notar que si la fuerza aplicada fuera justamente 3 veces la inicial, entonces la partícula alcanza la mitad de la coordenada radial con una velocidad tal que:

$$\dot{r}_1 = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\theta}_1 = 4\dot{\theta}_0$$

De donde resulta que:

$$v_1 = 2v_0$$

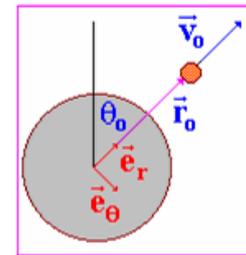
Con lo que, si deseáramos mantenerla en una trayectoria circular con el radio mencionado sería necesario aplicar una fuerza dada por:

$$F_1 = m r_1 \dot{\theta}_1^2 \quad \therefore \quad F_1 = 8 m r_0 \dot{\theta}_0^2$$

Claramente superior a la que estamos aplicando, por lo que deberemos esperar que una vez alcanzada dicha posición la coordenada radial se incremente nuevamente.

Tiro Vertical de Largo Alcance.

Consideremos el caso de una partícula que es lanzada verticalmente como se sugiere en la figura, donde la coordenada angular está determinada desde una dirección fija a un sistema de referencia solidario al planeta, como podría ser la indicada en la mencionada figura. Bajo estas condiciones y teniendo en cuenta la ley de gravitación, la partícula o el centro de masa del cuerpo se verá sometida a una fuerza dirigida hacia el centro del planeta, dada por:



$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

Que como lo podemos apreciar se trata de una fuerza radial esféricamente simétrica con su polo en el centro del planeta, con lo que estamos en condiciones de afirmar que las variaciones temporales de su coordenada angular dependerán de la coordenada radial, según:

$$\dot{\theta} = \frac{L_0}{m r^2}$$

De donde resulta que, como el momento angular respecto del centro del planeta en el instante inicial es nulo, entonces las variaciones temporales de su coordenada angular serán nulas y por lo tanto dicha coordenada permanecerá constante e igual al valor que tenía en el instante inicial.

$$\dot{\theta} = 0 \quad \therefore \quad \theta = \theta_0$$

Con lo que, como era de esperar, la partícula se desplazará a lo largo de una trayectoria recta coincidente con la dirección de su vector velocidad en el instante del lanzamiento, a lo largo de la cual y teniendo en cuenta (4.12), las variaciones temporales de su coordenada radial vendrán dadas por:

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_0^2 - 2GM \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right)$$

Que por ser la única componente no nula de su vector velocidad a lo largo de todo el movimiento, de la anterior resulta que a la velocidad de la partícula en función de su coordenada radial podremos expresarla como:

$$v^2 = v_o^2 - 2GM \left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r} \right) \quad 4.14$$

Teniendo en cuenta que cuando la partícula alcance su altura máxima se deberá verificar que en ese punto se anule su velocidad, de la anterior resulta que dicha altura máxima vendrá dada por:

$$r_m = \frac{2GM r_o}{2GM - r_o v_o^2}$$

Finalmente, podemos obtener una expresión para la mínima velocidad con que deberíamos lanzar la partícula si deseamos que llegue infinitamente lejos, que en adelante reconoceremos como *velocidad de escape*, y que podemos obtener de (4.14), imponiendo en ella que la velocidad se anule cuando su distancia al centro del planeta tienda a infinito, o bien, a partir de la anterior, requiriendo la nulidad del denominador, con lo que para la mencionada magnitud obtenemos:

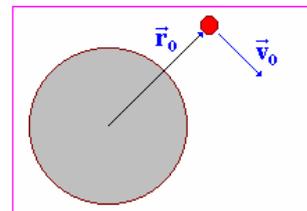
$$v_{o(\text{escape})} = \sqrt{\frac{2GM}{r_o}} \quad 4.15$$

Que si bien la hemos logrado para el caso particular de un lanzamiento vertical, como lo demostraremos posteriormente, la expresión anterior nos proporciona la velocidad de escape independientemente de las condiciones impuestas al lanzamiento, resultando diferencias según el tipo de lanzamiento, en la trayectoria a lo largo de la que se desplazará la partícula.

Suponiendo un lanzamiento desde la superficie de la tierra, de la anterior se obtiene una velocidad de escape del orden de 11 km/s (39.600 km/h), valor realmente importante para ser alcanzado en un corto desplazamiento ya que requeriría someter el cuerpo a una aceleración que difícilmente podría soportar una estructura física compleja como la de una nave espacial. Se recomienda el cálculo de dicha aceleración suponiendo que se desea alcanzar dicha velocidad en una distancia de 1 km.

Tiro Horizontal de Largo Alcance.

Considerando ahora un lanzamiento según una dirección perpendicular a su vector posición en el instante inicial, como el sugerido en la figura lateral, nuevamente estamos en condiciones de afirmar que por estar sometida a un campo de fuerza radial esféricamente simétrico con un momento angular inicial no nulo y una componente radial de su vector velocidad inicial nula, de (4.11) y (4.12), resulta:



$$\dot{\theta} = \frac{r_o v_o}{r^2}$$

$$\dot{r}^2 = (r_o v_o)^2 \left(\frac{1}{r_o^2} - \frac{1}{r^2} \right) - 2GM \left(\frac{1}{r_o} - \frac{1}{r} \right)$$

Imponiendo en las anteriores las condiciones necesarias para obtener la velocidad de escape, esto es, que ambas componentes sean nulas cuando la coordenada radial tienda a infinito, de las anteriores resulta para dicha magnitud una expresión coincidente con la lograda en el caso de un tiro vertical.

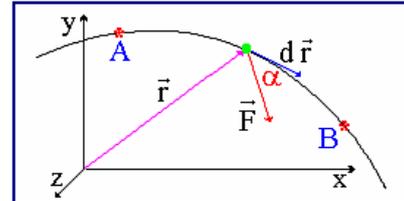
$$V_{\circ(\text{escape})} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{\circ}}}$$

4.04 TRABAJO MECÁNICO.

Considerando el caso de una partícula (o centro de masa de un cuerpo) que se mueve a lo largo de una trayectoria como la sugerida en la figura siguiente, sometida a un campo de fuerza que en general pueda depender de las tres coordenadas espaciales, caracterizado mediante una función del tipo.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$$

Definiremos el Trabajo Mecánico que dicho campo de fuerzas realiza sobre la partícula, o sobre el centro de masa de un cuerpo, a lo largo la trayectoria, entre dos puntos A y B pertenecientes a la misma, como:



4.16

Designando con (α) al ángulo entre el vector que caracteriza la fuerza a la que está sometida la partícula en cada punto, con ($d\mathbf{r}$) al vector desplazamiento tangente a la trayectoria, cuyo sentido coincide con el sentido del movimiento y expresando en componentes intrínsecas a las magnitudes involucradas en el integrando de la anterior, como se indica a continuación:

$$\vec{F}(\vec{r}) = (F \cos \alpha) \vec{e}_t + (F \sin \alpha) \vec{e}_n$$

$$d\vec{r} = \vec{v} dt \quad \therefore \quad d\vec{r} = s \vec{e}_t dt \quad \therefore \quad d\vec{r} = ds \vec{e}_t$$

El integrando de (4.16) nos quedará expresado como:

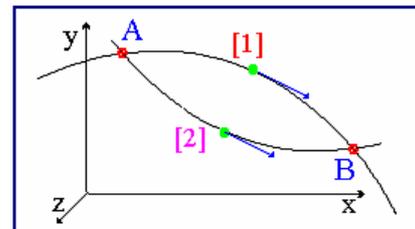
$$\vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = (F \cos \alpha) ds$$

Con lo que, el trabajo mecánico a lo largo de la trayectoria en consideración, queda:

$$W_{A,B} = \int_A^B F \cos \alpha ds \quad 4.17$$

Siendo interesante destacar, que la componente tangencial ($F \cos \alpha$), es la única que aporta al trabajo realizado por el campo de fuerza. Por lo tanto una fuerza normal a la trayectoria a lo largo de la que se desplace la partícula o el centro de masa de un cuerpo no realizará trabajo mecánico sobre el mismo, independiente de cual sea la longitud sobre la que estuviera aplicada.

Puesto que en general, tanto el módulo de la fuerza como el ángulo entre esta y el vector desplazamiento dependerán de la trayectoria a lo largo de la que se calcula la integral anterior, es claro entonces que, en general, el trabajo mecánico realizado por dicho campo de fuerza, entre dos puntos comunes a trayectorias distintas, dependerá de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcule, como se indica lateralmente.



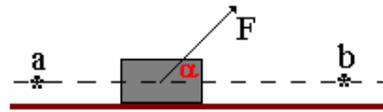
$$\int_A^B F \cos \alpha ds_1 \neq \int_A^B F \cos \alpha ds_2$$

Considerando el caso muy particular de un cuerpo que se desplace a lo largo de una trayectoria recta sometido a una fuerza cuyo módulo y dirección permanece constante, como se sugiere en la figura siguiente, de (4.17) resulta que para dicha situación y

designando con D a la distancia entre los puntos a y b de la trayectoria, el trabajo realizado por el campo de fuerza entre los puntos considerados vendrá dado por:

$$W_{ab} = F \cos \alpha \int_a^b ds$$

$$W_{ab} = FD \cos \alpha$$



Considerando ahora el caso de una partícula sometida a un campo de fuerza tal que sus componentes cartesianas vienen dadas por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = F_x(xyz)\vec{i} + F_y(xyz)\vec{j} + F_z(xyz)\vec{k}$$

Y expresando al vector desplazamiento en dichas componentes.

$$d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

El trabajo mecánico realizado por este campo de fuerza quedará expresado como:

$$W_{A,B} = \int_A^B F_x(xyz)dx + F_y(xyz)dy + F_z(xyz)dz$$

Que también podemos expresar como:

$$W_{A,B} = \int_A^B F_x(xyz)dx + \int_A^B F_y(xyz)dy + \int_A^B F_z(xyz)dz \quad 4.18$$

Donde cada una de las integrales deberá calcularse a lo largo de la trayectoria de interés, y que para el caso de una trayectoria contenida en el plano (xy) se reduce a:

$$W_{AB} = \int_A^B F_x(xyz)dx + \int_A^B F_y(xyz)dy \quad 4.19$$

Ejemplo.

Consideraremos el caso de una partícula que se desplaza a lo largo de una trayectoria contenida en el plano (x, y) , entre los puntos de coordenadas $(0,0)$ y $(2,4)$, sometida a un campo de fuerzas que en componentes cartesianas viene dado por:

$$\vec{F}(xyz) = (k_1x + k_2y)\vec{i} + k_3xy\vec{j}$$

Donde las constantes tienen unidades tales que las componentes del campo de fuerza queden expresadas en Newton.

Inicialmente calcularemos el trabajo realizado por dicho campo de fuerzas cuando la partícula se desplaza a lo largo de la recta que une los puntos indicados anteriormente, esto es, a lo largo de la recta $(y = 2x)$, en cuyo caso de (4.19) obtenemos que:

$$W = \int_{(0,0)}^{(2,4)} (k_1x + k_2y) dx + \int_{(0,0)}^{(2,4)} k_3xy dy$$

Teniendo en cuenta la trayectoria a lo largo de la que se pretende determinar el trabajo realizado por el campo de fuerza, entonces:

$$y = 2x \quad \therefore \quad dy = 2dx$$

Con lo que, el trabajo mecánico nos queda expresado como:

$$W = \int_0^2 (k_1x + k_2 2x) dx + \int_0^2 k_3 4x^2 dx$$

Resultando que dicha magnitud vendrá dada por:

$$W = \left[\frac{1}{2} k_1 x^2 + k_2 x^2 + \frac{4}{3} k_3 x^3 \right]_0^2$$

Suponiendo para las constantes los valores que se indican a continuación:

$$k_1 = 1 \text{ N/m} \quad k_2 = 2 \text{ N/m} \quad k_3 = 3 \text{ N/m}^2$$

El trabajo mecánico realizado por el campo de fuerza a lo largo de la trayectoria propuesta, resulta:

$$W = 42 \text{ Nm}$$

Supongamos ahora que la partícula se desplaza entre los mismos puntos a lo largo de la trayectoria ($y = x^2$) en cuyo caso, mediante el mismo procedimiento y teniendo en cuenta que en esta oportunidad:

$$y = x^2 \quad \therefore \quad dy = 2x dx$$

Obtenemos que el trabajo mecánico realizado por el campo de fuerza en consideración a lo largo de esta nueva trayectoria y suponiendo para las constantes los mismos valores, viene dado por:

$$W = \frac{58}{3} \text{ Nm}$$

Claramente diferente del resultado obtenido en el caso anterior.

Considerando ahora una situación similar pero suponiendo en esta oportunidad que el campo de fuerza al que se ve sometida la partícula viene expresado por:

$$\vec{F}(xyz) = (k_1 x + k_2 y^2) \vec{i} + k_3 xy \vec{j}$$

Ligeramente diferente al considerado recientemente y donde ahora las constantes tienen los valores y unidades que se indican a continuación.

$$k_1 = 1 \text{ N/m} \quad k_2 = 1 \text{ N/m}^2 \quad k_3 = 2 \text{ N/m}^2$$

Operando en forma análoga al caso anterior, se puede verificar que el trabajo realizado por este nuevo campo de fuerza a lo largo de las trayectorias consideradas anteriormente, será el mismo en ambos casos. En realidad, como posteriormente lo demostraremos, el trabajo mecánico realizado por este nuevo campo de fuerza será el mismo cualquiera sea la trayectoria seleccionada entre dos puntos extremos comunes a las mismas, o sea que es independiente de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcule.

4.05 ENERGÍA CINÉTICA.

Pensando en una partícula (o en el centro de masa de un cuerpo) que se mueve respecto de un sistema de referencia (xyz) entre dos puntos (A y B) a lo largo de una determinada trayectoria, consideraremos ahora el trabajo mecánico realizado por la *resultante de las fuerzas* de interacción a que está sometida la partícula o el centro de masa del sistema y que formalmente indicaremos como:

$$W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

Suponiendo que el sistema de referencia (xyz) involucrado es un Sistema Inercial y puesto que (F) es la Resultante de las fuerzas de interacción, teniendo en cuenta la Ecuación de Newton, es claro que la anterior puede expresarse como:

$$W = \int_A^B m \vec{a}_{xyz} \cdot d\vec{r}$$

O bien, como:

$$W = \int_A^B m \frac{d\vec{v}_{xyz}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

Que puede llevarse a la forma:

$$W = \int_{v_A}^{v_B} m \vec{v}_{xyz} \cdot d\vec{v}_{xyz}$$

Y que finalmente, teniendo en cuenta que *la masa de la partícula es independiente de su estado de movimiento*, aspecto que deberá revisarse al considerar partículas que se muevan con velocidades comparables con la velocidad de la luz, el trabajo mecánico podrá expresarse como:

$$W = \frac{1}{2} m \int_{v_A}^{v_B} dv_{xyz}^2$$

De donde resulta que el trabajo mecánico realizado por la resultante de las fuerzas de interacción estará relacionado con las velocidades de la partícula en los puntos extremos, mediante:

$$W = \frac{1}{2} m v_{B/xyz}^2 - \frac{1}{2} m v_{A/xyz}^2 \quad 4.20$$

Por lo tanto, cuando las velocidades están determinadas respecto de un sistema de referencia inercial, entonces el trabajo mecánico realizado por la resultante de las fuerzas de interacción estará vinculado con los cambios observados en la función:

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

Que en adelante reconoceremos como *energía cinética* de la partícula o del centro de masa del sistema en consideración.

A pesar de que ya fuera mencionado, resulta importante destacar que la validez de la relación (4.20), que a menudo suele identificarse como *Teorema de las Fuerzas Vivas*, requiere que el trabajo considerado sea el realizado por la resultante de las fuerzas de interacción, y que la energía cinética de la partícula esté determinada respecto de un sistema de referencia inercial.

Suponiendo que la energía cinética estuviera determinada respecto de un sistema de referencia no inercial, teniendo en cuenta lo desarrollado al considerar la ecuación de movimiento para sistemas no inerciales, podemos obtener una relación análoga a la (4.20) si en el trabajo mecánico se considera el realizado por las fuerzas de interacción más el realizado por la correspondiente fuerza inercial.

Finalmente resulta oportuno observar que si el campo de fuerza realiza un trabajo mecánico positivo, esto estará directamente asociado con un incremento en la energía cinética de la partícula, como sucede al dejar caer un cuerpo, en cuyo caso el campo de fuerza gravitatorio realiza un trabajo positivo que se traduce en un incremento de la energía cinética de dicho cuerpo. Inversamente en un tiro vertical, el trabajo mecánico del campo gravitatorio será negativo y la energía cinética disminuirá a medida que se incrementa la altura alcanzada por la partícula o centro de masa de un cuerpo.

En la naturaleza existen campos de fuerza que pueden realizar trabajo positivo, negativo o nulo, como es el caso del campo gravitatorio. En cambio existen otros campos de fuerza que por su naturaleza siempre realizarán trabajo mecánico negativo, como es el caso de las fuerzas de rozamiento, que siempre tienen sentido opuesto al movimiento. Otras fuerzas son incapaces de realizar trabajo mecánico y por lo tanto no pueden modificar la energía cinética de una partícula, como sucede con la fuerza a la que se ve sometida una partícula cargada que interactúa con un campo magnético estacionario, en cuyo caso la fuerza resulta siempre normal a la trayectoria y por lo tanto el trabajo mecánico realizado por dicho campo de fuerza será siempre nulo.

Ejemplo.

Para la situación planteada en la página 144 y teniendo en cuenta la relación (4.20), el trabajo mecánico realizado sobre la partícula por la fuerza que resulta de su interacción con la cuerda desde el instante inicial hasta el instante en que su coordenada radial se reduce a la mitad, vendrá dado por:

$$W = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2)$$

Suponiendo aplicada una fuerza (3) veces mayor que la requerida para mantener la trayectoria inicial, en cuyo caso, como ya lo demostráramos en el planteo original del mencionado ejemplo, la partícula alcanza la coordenada ($r_1 = r_0/2$) con una velocidad dada por:

$$v_1 = 2v_0$$

El trabajo mecánico realizado resultará:

$$W = \frac{3}{2} mv_0^2$$

Y por lo tanto:

$$W = 3T_0$$

Siendo interesante destacar la simplicidad del método, si lo comparamos con los inconvenientes que deberíamos sortear si deseáramos efectuar el cálculo directamente a partir de la definición dada para el trabajo mecánico.

Campo radial esféricamente simétrico.

Considerando el trabajo mecánico realizado por un campo de fuerza radial esféricamente simétrico como el que se indica a continuación:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r) \vec{e}_r$$

En cuyo caso, expresando al vector desplazamiento como:

$$d\vec{r} = \vec{v} dt$$

Y al vector velocidad en componentes polares, ya que para esta situación la trayectoria a lo largo de la que se desplazará la partícula será plana.

$$d\vec{r} = (r\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) dt$$

El vector desplazamiento quedará.

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$$

Con lo que, para esta situación, el integrando de (4.16) resulta:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = f(r) dr$$

Y el trabajo mecánico realizado por este campo de fuerza vendrá dado por:

$$W = \int_{r_A}^{r_B} f(r) dr \tag{4.21}$$

Claramente independiente de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcule. Así en el caso de una partícula de masa (m) que interactúa con el campo gravitatorio de un planeta de masa (M), el campo de fuerza a que se verá sometida la partícula viene expresado por:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r^2} \vec{e}_r$$

Con lo que el trabajo mecánico realizado sobre la partícula por dicho campo de fuerza resulta:

$$W = -\int_{r_A}^{r_B} G \frac{mM}{r^2} dr$$

Que por lo tanto será independiente de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcule y vendrá dado por:

$$W = -GmM \left[\left(-\frac{1}{r_B} \right) - \left(-\frac{1}{r_A} \right) \right] \quad 4.22$$

Análogamente, considerando una partícula sometida a un campo de fuerza elástico:

$$\vec{F}(r) = -k r \vec{e}_r$$

El trabajo realizado por este campo sobre una partícula vendrá expresado por:

$$W = -\int_{r_A}^{r_B} k r dr$$

Que nuevamente resulta independiente de la trayectoria, y viene dado por:

$$W = -\frac{1}{2} k (r_B^2 - r_A^2) \quad 4.23$$

Resultando interesante observar que para las situaciones consideradas el trabajo mecánico puede ser expresado como la diferencia, cambiada de signo, de una función escalar de la coordenada radial. Así en el caso de un campo gravitatorio la función a la que hacemos referencia, vendrá dada por:

$$\Phi(r) = -G \frac{mM}{r}$$

Y en el caso de un campo de fuerzas elásticas, por:

$$\Phi(r) = \frac{1}{2} k r^2$$

Con lo que en ambos casos, el trabajo mecánico realizado por el campo de fuerza es independiente de la trayectoria y puede ser expresado como:

$$W = -[\Phi(r_B) - \Phi(r_A)]$$

Donde (Φ) es la correspondiente función escalar a la que hacemos referencia anteriormente.

4.07 CAMPO DE FUERZA CONSERVATIVO.

Función Energía Potencial.

Diremos que un campo de fuerzas es un *Campo Conservativo* cuando, el trabajo mecánico realizado por dicho campo es independiente de la trayectoria a lo largo de la que se lo calcula y puede ser expresado como la diferencia, cambiada de signo, de una función escalar de las coordenadas de los puntos extremos involucrados, lo que formalmente puede expresarse como:

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = -[\Phi(\vec{r}_b) - \Phi(\vec{r}_a)] \quad 4.24$$

Donde a la función escalar, asociada con el campo de fuerza considerado, la reconoceremos en adelante como *Función Energía Potencial*, que como ya lo mencionáramos

mos será, en general, una función escalar de las coordenadas espaciales que en adelante identificaremos con:

$$\Phi = \Phi(\vec{r})$$

Teniendo en cuenta lo mencionado recientemente y atendiendo las conclusiones obtenidas en el tema anterior resulta que, en general, un campo de fuerza radial esféricamente simétrico deberá ser considerado un campo conservativo. En particular de (4.22) obtenemos que la función energía potencial asociada a un campo gravitatorio vendrá expresada por:

$$\Phi_g(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r} \quad 4.25$$

Análogamente teniendo en cuenta (4.23) es claro que la función energía potencial asociada con un campo de fuerza elástico vendrá expresada por:

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k r^2 \quad 4.26$$

Considerando el caso de una partícula sometida al campo de fuerza resultante de su interacción con un muelle lineal de longitud propia (r_o), con lo que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -k(\mathbf{r} - r_o) \vec{e}_r$$

Y teniendo en cuenta lo anterior, resulta que la función energía potencial asociada con dicho campo de fuerza vendrá expresada por:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k(\mathbf{r} - r_o)^2 \quad 4.27$$

Que en términos de la deformación (δ) del muelle podemos indicar como:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k\delta^2$$

Considerando la interacción con un campo de fuerza gravitatorio constante:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -mg \vec{j}$$

Resulta que la función energía potencial vendrá dada por:

$$\Phi_{gc}(\mathbf{r}) = mgy \quad 4.28$$

En este momento, resulta importante destacar que la Función Energía Potencial no está unívocamente definida, en realidad, está definida a menos de una constante arbitraria, en cuanto a que (4.24) nos define la diferencia de la función energía potencial y no la función misma, por lo que a cada una de las funciones obtenidas recientemente podríamos sumarle una constante arbitraria y su diferencia cambiada de signo continuaría satisfaciendo (4.24). Así a las funciones asociadas con cada uno de los campos considerados recientemente podríamos expresarlas como:

$$\Phi_g(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r} + \text{cte}$$

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} kr^2 + \text{cte}$$

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k(\mathbf{r} - r_o)^2 + \text{cte}$$

$$\Phi_{gc}(\mathbf{r}) = mgy + cte$$

Y continuarían satisfaciendo lo requerido por (4.24), lo que puede parecer un serio inconveniente, sin embargo no lo es, puesto que en general estaremos interesados no en el valor que toma dicha función sino en la diferencia de dicha función entre dos estados determinados, o sea en el trabajo mecánico realizado por el campo de fuerza en consideración, que es el que producirá cambios en la energía cinética de la partícula o centro de masa de un cuerpo. Sin embargo resulta cómodo para el manejo de información, ponernos de acuerdo en asignar a dichas constantes un determinado valor, siendo indudablemente el valor nulo el más recomendable, lo que para cada uno de los casos considerados implica asignar arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial para puntos del espacio según los criterios que se detallan a continuación.

Campo Gravitatorio.

Asignaremos arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial cuando la coordenada radial involucrada tiende a infinito, con lo que la constante será nula y la función nos queda:

$$\Phi_g(\mathbf{r}) = -G \frac{mM}{r}$$

Campo de Fuerza Elástico.

Asignaremos arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial cuando la coordenada radial involucrada es nula, con lo que la constante será nula y la función nos queda:

$$\Phi_e(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} kr^2$$

Interacción con un Muelle Lineal.

Asignaremos arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial cuando la coordenada radial coincide con la longitud propia del muelle, o sea cuando el muelle está sin deformar, con lo que:

$$\Phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} k(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2$$

Campo Gravitatorio Constante.

Asignaremos arbitrariamente el valor nulo a la función energía potencial cuando la coordenada vertical es nula, con lo que la constante será nula y la función nos queda:

$$\Phi_{gc}(\mathbf{r}) = mgy$$

Aceptando estas condiciones, en adelante podremos referirnos sin ambigüedades a la función energía potencial asociada con los campos de fuerza mencionados anteriormente.

Finalmente resulta interesante notar que si un campo de fuerzas es conservativo y por ende satisface (4.24) entonces el trabajo mecánico realizado por dicho campo a lo largo de una trayectoria cerrada será nulo, ya que en ese caso los extremos de integración serán coincidentes y por lo tanto también lo serán los valores de la función energía potencial, con lo que.

$$\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$$